1+1 dimensionale Quantenchromodynamik auf dem Kreis in Axialer und Palumbo-Eichung

Diplomarbeit
von
Stephan Seeger

Institut
für
Theoretische Physik III
Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Juli 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Eichfixierter Hamilton-Operator in 1+1 Dimensionen **6**

3 Die kinetische Energie der Nullmoden **14**

4 Der statische Limes der SU(2)-QCD_{1+1} **21**

4.1 Hamilton-Operator und Vakuum im statischen Limes 21

4.2 Konstruktion physikalischer Zustände 24

4.2.1 Axiale Eichung 24

4.2.2 Palumbo-Eichung 27

4.3 Eigenwerte in Störungrechnung 31

5 Zusammenfassung und Diskussion **37**

A Projektion auf physikalische Zustände **39**

B Ergänzungen zur Projektion **43**

Kapitel 1

Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die Theorie, von der man annimmt, daß sie die starke Wechselwirkung beschreibt. Bei dieser Theorie handelt es sich um eine Eichtheorie, in der — wie in jeder Eichtheorie — unterschiedliche Eichfeldkonfigurationen die gleiche Physik beschreiben, so daß eine Redundanz in der Anzahl von Freiheitsgraden in der Theorie vorliegt. Diese Redundanz kann dazu benutzt werden, einige Eichfelder durch eine sogenannte Eichfixierung zu eliminieren. Klassisch versteht man unter dieser Elimination das zu Null Setzen bestimmter Eichfreiheitsgrade. In der quantisierten Theorie ist jedoch zu beachten, daß es sich bei den Eichfeldern um Operatoren in einem Hilbertraum handelt, die nicht einfach in einer Operatoridentität gleich dem Nulloperator gesetzt werden können, da die kanonischen Kommutatorrelationen zwischen Eichfeldern und deren konjugierten Impulsen beachtet werden müssen. Unter der Elimination von Eichfreiheitsgraden versteht man hier einfach nur, daß die Symmetrie des Hamilton-Operators derart ausgenutzt wird, daß bestimmte Eichfreiheitsgrade durch Anwendung unitärer Transformationen nicht mehr im Hamilton-Operator auftreten.

Im Rahmen einer Hamiltonschen Formulierung der Theorie bietet es sich an — noch unmittelbar bevor man die Theorie durch Forderung kanonischer (Anti-)Kommutatorrelationen quantisiert —, in die sogenannte Weyl-Eichung überzugehen, in der auf klassischer Ebene die Null-Komponente des Eichfeldes zu Null gesetzt ($A_0 = 0$) wird[1]. Da auf diese Weise die zu A_0 gehörige Euler-Lagrange-Gleichung — das Gaußsche Gesetz — verloren geht, muß diese extra als eine Zwangsbedingung an physikalische Zustände gefordert werden: physikalische Zustände werden als Eigenzustände des Gauß-Gesetz-Operators — dieser ist als der nach Null aufgelöste Term der A_0-Euler-Lagrange-Gleichung in Operatorform erklärt — zum Eigenwert Null definiert.

Diese als Gauß-Gesetz bezeichnete Zwangsbedingung an physikalische Zustände ist insbesondere abhängig von den konjugierten Impulsen $\vec{\Pi}$ der räumlichen Komponenten der Eichfelder $\vec{A}$, die auch in der Weyl-Eichung noch eine Eichfreiheit aufweisen. Das Gauß-Gesetz kann nun dazu benutzt werden zu entscheiden, welche Eichfreiheitsgrade durch eine weitere Eichfixierung am vorteilhaftesten zu eliminieren sind. Das Kriterium bei dieser Ent-

[1] Dadurch werden Schwierigkeiten bei der kanonischen Quantisierung von A_0 — aufgrund des Fehlens der Zeitableitung von A_0 in der Lagrangedichte und dem daraus resultierenden Problem der Definition eines konjugierten Impulses zu A_0 — vermieden.

scheidung ist, nach welchen konjugierten Impulsen der Eichfelder sich das Gauß-Gesetz am leichtesten auflösen läßt. Denn wird eine Eichfixierung in den dazugehörigen Eichfreiheitsgraden vorgenommen, d.h. werden diese Eichfreiheitsgrade durch eine unitäre Transformation aus dem Hamilton-Operator eliminiert, so kann mit Hilfe des Gauß-Gesetzes ein im physikalischen Sektor gültiger Ausdruck für die konjugierten Impulse dieser Eichfreiheitsgrade gefunden werden, so daß diese ebenfalls im Hamilton-Operator des physikalischen Sektors nicht mehr auftreten. Erst durch die Elimination von Eichfreiheitsgraden mitsamt den dazugehörigen konjugierten Impulsen aus dem Hamilton-Operator des physikalischen Sektors wird in konsistenter Weise eine Eichfixierung durchgeführt [2].

Das Auflösen des Gauß-Gesetzes nach konjugierten Impulsen irgendwelcher Eichfreiheitsgrade ist in jedem Fall mit der Invertierung eines Operators verbunden. Wie man sich am einfachsten in der Eigenbasis dieses Operators klar macht — dort kann man den Operator in seiner Wirkung auf einen Basisvektor durch den dazugehörigen Eigenwert ersetzen —, treten Probleme bei der Operatorinvertierung genau dort auf, wo der Operator verschwindende Eigenwerte besitzt. Die bei der Invertierung resultierenden Singularitäten bei verschwindenen Eigenwerten bezeichnet man als Infrarotsingularitäten[3]. Um diesen Infrarotschwierigkeiten in wohldefinierter Weise zu begegnen, muß man die Null-Eigenwerte aus dem (kontinuierlichen) Spektrum isolieren, um sie dann in gesonderter Weise zu behandeln. Die erforderliche Diskretisierung des Spektrums wird dadurch erreicht, daß man von dem zu invertierenden Operator, welcher sich in der 3+1 dimensionalen Theorie als $\vec{x}$-abhängig erweist, fordert, daß er periodischen Randbedingungen unterliegt[4]. Diese Periodizität wird automatisch erfüllt, wenn die Theorie in der Weyl-Eichung von vornherein auf einem Torus formuliert wird[5]. Man formuliert die Theorie also auf einem Torus, um Infrarotschwierigkeiten geeignet zu begegnen.

Wie bereits erwähnt, werden am vorteilhaftesten diejenigen Eichfreiheitsgrade durch die Eichfixierung eliminiert, nach deren konjugierten Impulsen sich das Gauß-Gesetz am *einfachsten* auflösen läßt. Ob die Auflösung des Gauß-Gesetzes nach konjugierten Impulsen der gerade betrachteten Eichfreiheitsgrade nun einfach ist oder nicht, läßt sich auf formaler Ebene an dieser Stelle noch nicht entscheiden, da die Auflösung des Gauß-Gesetzes nur mit der (formalen) Invertierung eines Operators verbunden ist[6]. Will man die Invertierung jedoch explizit machen, so muß man in die Eigenbasis des zu invertierenden Operators übergehen, um den Operator in seiner Wirkung auf Basisvektoren durch Zahlen (Eigenwerte) ersetzen zu können. Dafür muß notwendigerweise das Eigenwert-Problem des zu invertierenden Operators gelöst werden. Mit der *einfachen* Auflösung des (transformierten) Gauß-Gesetzes ist daher gemeint, daß das Eigenwert-Problem des mit dieser Auflösung verbundenen Operators einfach, d.h. analytisch lösbar ist.

[2]Siehe dazu aber auch [See95].

[3]In Anlehnung an die bei Entwicklungen üblich benutzte Basis von ebenen Wellen (Fouriertransformation!), in der Wellenzahlvektoren $\vec{k}$ als Eigenwerte eines Impulsoperators auftreten und verschwindende Eigenwerte somit großen Wellenlängen (infrarot) entsprechen.

[4]Damit sollten auch die Eigenzustände periodischen Randbedingungen unterliegen, was zur Diskretisierung des Spektrums führt.

[5]D.h. wenn von vornherein für die Eichfelder periodische Randbedingungen und für die Massefelder quasiperiodische Randbedingungen gefordert werden.

[6]Formal läßt sich das Inverse eines Operators $\hat{O}$ einfach als $\hat{O}^{-1}$ schreiben.

Auf dieses Kriterium hin können nun die üblich verwendeten Eichbedingungen untersucht werden. Die Lorentz-Eichbedingung kommt von vornherein nicht in Frage, da wir durch Verwendung des Hamiltonschen Formalismus und der Weyl-Eichung uns schon gegen eine kovariante Eichung entschieden haben. Bei der Coulomb-Eichung, in der der longitudinale Anteil des Eichfeldes aus dem Hamilton-Operator eliminiert wird, ist in der 3+1 dimensionalen QCD mit der Auflösung des Gauß-Gesetzes nach dem longitudinalen Anteil des konjugierten Impulses die Invertierung eines Operators verbunden, dessen Eigenwert-Problem nicht analytisch gelöst werden kann. Einzig in der Axialen Eichung, in der die 3-Komponente des Eichfeldes aus dem Hamilton-Operator eliminiert wird, ist der zu invertierende Operator mit einem analytisch lösbaren Eigenwert-Problem verknüpft.
Es bietet sich also an, die QCD im Hamiltonschen Formalismus in der Weyl-Eichung auf einem Torus zu formulieren und die weitere Eichfixierung in der Axialen Eichung durchzuführen. Nun zeigt sich jedoch, daß die Formulierung auf dem Torus die vollständige Elimination der 3-Komponente des Eichfeldes aus dem Hamilton-Operator verhindert. In einer Arbeit von Lenz et al. [Len94.2] wird daher in einem ersten Schritt zunächst soviel von der 3-Komponente des Eichfeldes durch eine unitäre Transformation aus dem Hamilton-Operator eliminiert, wie mit einer Formulierung auf dem Torus verträglich ist. In einem zweiten Schritt wird dann ein niederdimensionales Feld in den 1,2-Komponenten des Eichfeldes aus dem Hamilton-Operator entfernt. Dieses Vorgehen bei der Eichfixierung werden wir der Einfachheit halber als Axiale Eichung bezeichnen. In einer von Palumbo vorgeschlagenen klassischen Eichbedingung [Pal86], die von M.Thies in den quantenmechanischen Formalismus der Eichfixierung übertragen wurde [Thi93], wird alternativ in einem ersten Schritt nur soviel von der 3-Komponente des Eichfeldes eliminiert, wie im schwachen Kopplungslimes $g \to 0$ mit der Auflösung des Gauß-Gesetzes nach dem zugehörigen konjugierten Impuls verträglich ist. Man erwartet daher, daß die sogen. *Palumbo*-Eichung insbesondere für den schwachen Kopplungslimes geeignet ist. In einem 2. und 3. Schritt der Eichfixierung werden dann niederdimensionale Felder in der 2- und 1-Komponente des Eichfeldes — in völliger formaler Analogie zum ersten Schritt der Eichfixierung — aus dem Hamilton-Operator eliminiert (siehe [See95]).

Sowohl in der Palumbo-Eichung als auch in der Axialen Eichung verbleiben nach der Eichfixierung globale, d.h. $\vec{x}$-unabhängige Rest-Gauß-Gesetze in der Theorie, die nicht mehr durch Auflösung nach konjugierten Impulsen in den Hamilton-Operator implementiert werden, da eine weitere Auflösung formal sehr aufwendig wird. Diese Rest-Gauß-Gesetze definieren die physikalischen Zustände nach den unitären Eichfixierungstransformationen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen nun Axiale und Palumbo-Eichung in einer Raum- und einer Zeitdimension (1+1 dim) vergleichend dargestellt werden. In $1 + 1$-Dimensionen ist die Eichung bereits nach der ersten unitären Transformation fixiert. Dies führt dazu, daß die Palumbo-Eichung sich von der Axialen Eichung nur dadurch unterscheidet, daß sie nicht so weit fixiert wurde wie die Axiale Eichung. Einen neuen Namen (nämlich Palumbo-Eichung) für die nicht so weit fixierte Axiale Eichung einzuführen, erscheint eigentlich nicht gerechtfertigt und ist nur vom Standpunkt der 3+1 dimensionalen Theorie zu verstehen.

Innerhalb einer Approximation wollen wir in der 1+1 dimensionalen Theorie eine alternative Methode zur Eichfixierung mittels unitärer Transformationen vorstellen. Auf diese Weise werden wir die Hamilton-Operatoren der Axialen und der Palumbo-Eichung ineinander überführen.

In Arbeiten von B.Schreiber und M.Engelhardt ([Sch93], [Eng94], [Eng95]) wurde gezeigt, daß in der 1+1 dimensionalen QCD durch die sorgfältige Betrachtung der Theorie auf dem endlichen Intervall eine partielle Rechtfertigung für das Farbdogma des nichtrelativistischen Quarkmodells möglich ist. Dieses Farbdogma besagt, daß Quarks in realisierten Zuständen stets zum Farbsingulett abgekoppelt werden. Der Rest der Wellenfunktion (Ort, Spin, Flavor) ist dann wegen des Pauliprinzips symmetrisch unter Austausch der Quarks.

Die Rechtfertigung des Farbdogmas folgte insbesondere aus der detaillierten Untersuchung des Spektrums des eichfixierten Hamilton-Operators in der Approximation statischer, d.h. unendlich schwerer Quarks. In [Sch93] wurde dieses Spektrum auf analytische Weise exakt bestimmt. Wir wollen zeigen, wie man diese exakten Resultate bereits in einer Störungsrechnung in L erhalten kann, wobei L der Umfang des Kreises ist, auf dem man die Theorie formuliert.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert.

Im 2.Kapitel werden wir ausgehend vom Weyl-Hamilton-Operator der 1+1 dimensionalen QCD die eichfixierten Hamilton-Operatoren der Axialen und der Palumbo-Eichung für eine SU(N)-Theorie ableiten. Dieses Kapitel dient uns in erster Linie zur Einführung in die verwendeten Bezeichnungen und Größen.

Im 3.Kapitel beschäftigen wir uns mit der kinetischen Energie der Nullmoden in Axialer und Palumbo-Eichung. Wir referieren die auf die 1+1 dimensionale QCD übertragenen Ergebnisse aus [Len94.2] für die Axiale Eichung und übertragen die beschriebene Vorgehensweise auf die Palumbo-Eichung.

Im 4.Kapitel spezialisieren wir die Theorie auf den statischen Limes der 1+1 dimensionalen QCD mit einer SU(2)-Farbgruppe und für baryonische Zustände. In der Axialen Eichung konstruieren wir zunächst nach dem Vorbild von [Sch93] die physikalischen Baryonzustände und übertragen das Konstruktionsprinzip anschließend auf die Palumbo-Eichung. Abschließend werden wir in Störungsrechnung 1.Ordnung in L das Spektrum des vollständig eichfixierten Hamilton-Operators in der beschriebenen Approximation bestimmen.

Im 5.Kapitel werden die Ergebnisse zusammengefaßt und diskutiert.

Kapitel 2

Der eichfixierte Hamilton-Operator in 1+1 Dimensionen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der Hamilton-Operator der 1+1 dimensionalen QCD für eine SU(N)-Theorie in der Weyl-Eichung $A_0 = 0$ [1],

$$H = \int_0^L dx \Big[-i\psi^\dagger(x)\alpha\Big(\partial_x - igA(x)\Big)\psi(x) + m\psi^\dagger(x)\beta\psi(x) + \frac{1}{2}\Pi^a(x)\Pi^a(x)\Big] \quad , \tag{2.1}$$

zusammen mit dem Gauß-Gesetz, das die physikalischen Zustände des Hilbertraums definiert,

$$G^a(x)\big|\mathbf{phys}\big\rangle = 0 \qquad , \; a = 1, \ldots, N^2-1 \quad , \tag{2.2}$$

wobei

$$G^a(x) = D^{ac}(x)\Pi^c(x) + g\rho_m^a(x) \tag{2.3}$$

mit

$$D^{ac}(x) = \partial_x\delta^{ac} + gf^{abc}A^b(x) \quad , \tag{2.4}$$

$$\rho_m^a(x) = \psi_i^\dagger(x)\frac{\lambda_{ij}^a}{2}\psi_j(x) \quad . \tag{2.5}$$

Wir verwenden die übliche Abkürzung

$$A(x) = A^a(x)\frac{\lambda^a}{2} \tag{2.6}$$

und vereinbaren, daß mit Null indizierte Farblabel (z.B. a_0) zur Cartan Unteralgebra der SU(N)-Generatoren — d.h. in der gewöhnlichen Darstellung zu diagonalen λ-Matrizen — gehören[2].

Die Theorie soll auf einem Kreis des Umfangs L formuliert werden. Man fordert daher,

$$A(x+L) = A(x) \quad , \tag{2.7}$$

$$\psi(x+L) = e^{i\varphi}\psi(x) \qquad , \quad \varphi \text{ beliebig} \quad . \tag{2.8}$$

[1] Man beachte, daß es in 1+1 Dimensionen kein B-Feld gibt und daß kein Spin existiert, da die Antikommutationsalgebra der Dirac'schen γ-Matrizen bereits von 2×2-Matrizen erfüllt wird.

[2] In der SU(N) gehören $N-1$ der N^2-1 Generatoren zur Cartan Unteralgebra.

Die Quantisierung des Systems erfolgt durch Postulieren der kanonischen (Anti-)Kommutatorrelationen[3]

$$\left[\psi_{\alpha,i}(x), \psi^\dagger_{\beta,j}(y)\right]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta(x-y) \quad , \quad \begin{array}{l} \alpha,\beta = 1,2 \quad , \\ i,j = 1,\ldots,N \quad , \end{array} \tag{2.9}$$

$$\left[\Pi^a(x), A^b(y)\right]_- = \frac{1}{i}\delta_{ab}\delta(x-y) \quad , \quad a,b = 1,\ldots,N^2-1 \quad . \tag{2.10}$$

Der Weyl-Hamilton-Operator (2.1) besitzt eine Symmetrie unter (residuellen) Eichtransformationen,

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'(x) = e^{ig\beta(x)}\psi(x) \tag{2.11}$$

$$A(x) \quad \rightarrow \quad A'(x) = e^{ig\beta(x)}\left(A(x) + \frac{i}{g}\partial_x\right)e^{-ig\beta(x)} \tag{2.12}$$

mit beliebiger x-abhängiger SU(N)-Matrix $e^{ig\beta(x)}$.
Um in die Axiale[4] bzw. in die Palumbo-Eichung überzugehen[5], transformiert man den Weyl-Hamilton-Operator mit dem unitären Operator

$$U[\xi] = \exp\left[-i\int_0^L dx\, g\rho^a_m(x)\xi^a(x)\right] \quad , \tag{2.13}$$

wobei die Eichfunktion $\xi(x)$ beim Übergang zur Palumbo-Eichung gegeben ist durch

$$e^{ig\xi_{\mathrm{Pal}}(x)} = e^{ig\tau(x)}e^{-ig\frac{\theta}{L}x} \tag{2.14}$$

bzw. beim Übergang zur Axialen Eichung durch

$$e^{ig\xi_{\mathrm{Ax}}(x)} = e^{ig\tau(x)}e^{-ig\frac{\theta}{L}x}e^{ig\Delta} \tag{2.15}$$

mit den Definitionen

$$e^{ig\tau(x)} = \mathcal{P}e^{ig\int_0^x dx'\,A(x')} \quad , \tag{2.16}$$

$$e^{ig\theta} = e^{ig\tau(L)} \tag{2.17}$$

und der unitären Matrix $e^{ig\Delta}$, die per Definition $\theta = \theta^a\frac{\lambda^a}{2}$ diagonalisiert,

$$e^{-ig\Delta}\frac{\theta}{L}e^{ig\Delta} = a \quad , \quad a = \sum_{c_0=1}^{N-1} a^{c_0}\frac{\lambda^{c_0}}{2} \quad . \tag{2.18}$$

[3] α ist der Dirac-Index, i ist der Farbindex.

[4] In 1+1 Dimensionen bezeichnet man die Axiale Eichung auf dem Kreis aufgrund ihrer klassischen Eichbedingung $\partial_x A(x) = 0$ auch als Coulomb-Eichung.

[5] Für eine detaillierte Gegenüberstellung von Axialer und Palumbo-Eichung in 3+1 Dimensionen, die auch die Wahl der Eichfunktionen motiviert, siehe [See95].

Die Palumbo-Eichung unterscheidet sich in 1+1 Dimensionen von der Axialen Eichung damit im wesentlichen um eine abschließende Diagonalisierung. Die Wahl obiger Eichfunktionen bedeutet für die Palumbo-Eichung, daß

$$A'(x) = e^{-ig\xi_{\mathrm{Pal}}(x)} \Big(A(x) + \frac{i}{g}\partial_x \Big) e^{ig\xi_{\mathrm{Pal}}(x)} = \frac{\theta}{L} \tag{2.19}$$

und für die Axiale Eichung, daß

$$A'(x) = e^{-ig\xi_{\mathrm{Ax}}(x)} \Big(A(x) + \frac{i}{g}\partial_x \Big) e^{ig\xi_{\mathrm{Ax}}(x)} = a \quad . \tag{2.20}$$

Bei der Transformation des Hamilton-Operators (2.1) mit $U_{[\xi]}$ beschränkt man sich auf den physikalischen Sektor, da die Transformation des chromoelektrischen Feldes Π — aufgrund der komplizierten Abhängigkeit der unitären Transformation $U_{[\xi]}$ von A über die Eichfunktion ξ — große technische (noch unbewältigte) Schwierigkeiten bereitet.
Im physikalischen Sektor kann man das Gauß-Gesetz (2.2) ausnutzen, um das transformierte chromoelektrische Feld $U\Pi U^\dagger$ durch andere Freiheitsgrade auszudrücken,

$$\begin{aligned} U\Pi U^\dagger \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle &= U\Big[(-)\frac{1}{D} g\rho_m\Big] U^\dagger \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \\ &= -\frac{1}{D} e^{ig\xi} g\rho_m e^{-ig\xi} \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \end{aligned} \tag{2.21}$$

mit

$$\big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle = U\big|\mathbf{phys}\big\rangle \tag{2.22}$$

und den jeweiligen Ausdrücken für $e^{ig\xi}$ in Axialer (2.15) und Palumbo-Eichung (2.14).
Um diesen Ausdruck (2.21) explizit zu machen, muß $U\Pi U^\dagger$ in die Eigenbasis von D entwickelt werden, so daß D in der Wirkung auf seine Eigenvektoren durch seine Eigenwerte ersetzt werden kann. Das Eigenwert-Problem

$$D\Big|\zeta_{c,n}\Big) = i\mu_{c,n}\Big|\zeta_{c,n}\Big) \tag{2.23}$$

wird gelöst durch[6]

$$\Big(x\Big|\zeta_{c,n}\Big) = \tilde{U}\hat{z}_c\tilde{U}^\dagger \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}nx} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} &\tilde{U} = e^{ig\tau(x)} e^{-ig\frac{\theta}{L}x} e^{ig\Delta}, \\ &\big(\hat{z}_c\big)_{ij} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\delta_{ip}\delta_{jq} \quad , \quad c = c(q,p) \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\mu_{c_{(q,p)},n} = \frac{2\pi n}{L} + g\big(a_q - a_p\big) \quad , \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots \quad , \tag{2.25}$$

wobei a_q das q-te Diagonalelement der Diagonalmatrix a darstellt. Wir merken an, daß verschwindende Eigenwerte zu $n = 0$ und $c = c_{(q,q)} =: c_0$ gehören. Im Fall des schwachen

[6] Wir weichen bei der Normierung der Eigenvektoren von der in [Len94.2] gewählten Konvention ab, um die Vollständigkeitsrelation einfacher zu schreiben. Bei uns ist der räumliche Anteil der Eigenvektoren auf $\int_0^L$, in [Len94.2] auf $\frac{1}{L}\int_0^L$ normiert.

Kopplungslimes $g \to 0$ sind verschwindene Eigenwerte bereits äquivalent zu $n = 0$.
Für die Eigenvektoren gelten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation in der Form,

$$\Big(\zeta_{c,n}\Big|\zeta_{c',n'}\Big) = \delta_{cc'}\delta_{nn'} \quad , \tag{2.26}$$

$$\sum_{c,n}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big| = \mathbf{1} \quad . \tag{2.27}$$

Insbesondere gilt durch Einschub eines vollständigen Satzes von Orts-Farb-Zuständen,

$$\begin{aligned}\Big(\zeta_{c,n}\Big|\zeta_{c',n'}\Big) &= \sum_{a=1}^{N^2-1}\int_0^L dx\ \Big(\zeta_{c,n}\Big|x,a\Big)\Big(x,a\Big|\zeta_{c',n'}\Big) \\ &= \sum_{a=1}^{N^2-1}\int_0^L dx\ \zeta^{a*}_{c,n}(x)\zeta^{a}_{c',n'}(x) \quad .\end{aligned} \tag{2.28}$$

Entwickelt man nun $U\Pi U^\dagger$ in die Eigenvektoren von D,

$$\Big|U\Pi U^\dagger\Big) = \sum_{c,n}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|U\Pi U^\dagger\Big) \quad , \tag{2.29}$$

so kann man mit Hilfe von (2.21) im physikalischen Sektor schreiben,

$$\begin{aligned}\Big|U\Pi U^\dagger\Big)|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle &= \sum_{c,n}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big| -\frac{1}{D}e^{ig\xi}g\rho_m e^{-ig\xi}\Big)\ |\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle \\ &= \Bigg[\sum_{\substack{c,n\\ \mu_{c,n}\neq 0}}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|\frac{-e^{ig\xi}g\rho_m e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big) + \sum_{\substack{c_0\\ (\mu_{c_0,0}=0)}}\Big|\zeta_{c_0,0}\Big)\Big(\zeta_{c_0,0}\Big|U\Pi U^\dagger\Big)\Bigg]|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Man erhält für die Entwicklungskoeffizienten einen im physikalischen Sektor gültigen Ausdruck in Form anderer Freiheitsgrade nur dann, wenn der zugehörige Basisvektor kein Eigenvektor von D zum Eigenwert Null ist. Für den Fall des schwachen Kopplungslimes $g \to 0$ sind verschwindene Eigenwerte bereits äquivalent zu $n = 0$. Dieser Umstand motiviert in der 3+1 dimensionalen Theorie, das Gauß-Gesetz (2.21) im Fall $n = 0$ nicht auszunutzen, um einen auch für den schwachen Kopplungslimes geeigneten Ausdruck für $U\Pi U^\dagger$ zu bekommen. Dieser Ausdruck für $U\Pi U^\dagger$ wird dann in der Palumbo-Eichung verwendet[7]. Wir folgen dem Vorbild der 3+1 dimensionalen Theorie und nutzen das Gauß-Gesetz im Fall $n = 0$ nicht aus, so daß wir für weniger Entwicklungskoeffizienten als in (2.30) einen Ausdruck in Form anderer Freiheitsgrade im physikalischen Sektor erhalten,

$$\Big|U\Pi U^\dagger\Big)|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle = \Bigg[\sum_{\substack{c,n\\ n\neq 0}}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|\frac{-e^{ig\xi}g\rho_m e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big) + \sum_{\substack{c\\ (n=0)}}\Big|\zeta_{c,0}\Big)\Big(\zeta_{c,0}\Big|U\Pi U^\dagger\Big)\Bigg]|\widetilde{\mathbf{phys}}\rangle. \tag{2.31}$$

[7] Für eine genaue Begründung siehe [See95].

Wir verwenden für das transformierte chromoelektrische Feld $U\Pi U^\dagger$ in der Axialen Eichung den Ausdruck (2.30) und in der Palumbo-Eichung den Ausdruck (2.31). $e^{ig\xi}$ in (2.30) ist somit durch (2.15), $e^{ig\xi}$ in (2.31) durch (2.14) gegeben.
Im Fall verschwindener Eigenwerte $\mu_{c_0,0} = 0$ bzw. $n = 0$ haben wir das transformierte Gauß-Gesetz (2.21) nicht ausgenutzt. Daher verbleibt uns in Axialer und Palumbo-Eichung jeweils ein nicht-implementiertes Rest-Gauß-Gesetz in der Theorie,

$$\text{Axiale Eichung:} \qquad Q^{c_0}_{\text{Quark}}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle = 0 \quad , \quad c_0 = 1, \dots, N-1 \quad , \tag{2.32}$$

$$\text{Palumbo-Eichung:} \qquad gQ^a_{\text{ges}}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big\rangle = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, N^2-1 \tag{2.33}$$

mit

$$Q^a_{\text{ges}} = Q^a_{\text{Quark}} + Q^a_{\text{Gluon}} \quad , \tag{2.34}$$

wobei[8]

$$Q^a_{\text{Quark}} = \int_0^L dx\, \rho^a_m(x) \quad , \tag{2.35}$$

$$Q^a_{\text{Gluon}} \simeq \frac{1}{i} f^{abc}\theta^b \frac{\partial}{\partial\theta^c} \tag{2.36}$$

und

$$\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle = U[\xi_{\text{Ax}}]\big|\mathbf{phys}\big\rangle \quad , \tag{2.37}$$

$$\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big\rangle = U[\xi_{\text{Pal}}]\big|\mathbf{phys}\big\rangle \quad . \tag{2.38}$$

Es sei angemerkt, daß sowohl Q^a_{Quark} als auch Q^a_{Gluon} der SU(N)-Algebra genügen,

$$\Big[Q^a_{\text{Quark}}, Q^b_{\text{Quark}}\Big] = if^{abc}Q^c_{\text{Quark}} \quad , \tag{2.39}$$

$$\Big[Q^a_{\text{Gluon}}, Q^b_{\text{Gluon}}\Big] = if^{abc}Q^c_{\text{Gluon}} \quad . \tag{2.40}$$

Dies wird sich bei der späteren expliziten Konstruktion von physikalischen Zuständen als wichtig erweisen.
Schreiben wir den kinetischen Term der Eichfelder[9] aus dem Weyl-Hamilton-Operator (2.1) elegant mit Hilfe des Skalarproduktes (2.28), so ergibt sich hierfür unter Verwendung von (2.30), (2.31) im physikalischen Sektor,

[8] Der Name Q_{Gluon}, der an eine gluonische Ladung erinnern soll, erklärt sich wie folgt: Ladungen lassen sich als Generatoren globaler Eichtransformationen definieren. Der gluonische Anteil dieses Generators ist durch Q_{Gluon} gegeben.

[9] In der 3+1 dimensionalen Theorie bezeichnet man $\int d^3x \frac{1}{2}\vec{\Pi}^a\vec{\Pi}^a$ als kinetischen, $\int d^3x \frac{1}{2}\vec{B}^a\vec{B}^a$ als potentiellen Term der Eichfelder.

$$
\begin{aligned}
\big\langle \widetilde{\mathbf{phys}} \big| U \frac{1}{2}\Big(\Pi\Big|\Pi\Big) U^\dagger \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle &= \big\langle \widetilde{\mathbf{phys}} \big| \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{\substack{c,n\\ \mu_{c,n}\neq 0\\ \text{bzw.}\, n\neq 0}} \Big(-\frac{e^{ig\xi} g\rho_m e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big|\zeta_{c,n}\Big)\Big(\zeta_{c,n}\Big|-\frac{e^{ig\xi} g\rho_m e^{-ig\xi}}{i\mu_{c,n}}\Big)}^{H_{\text{Coul}}} \\
&\quad \underbrace{+\frac{1}{2}\sum_{\substack{c\\ \left(\substack{\mu_{c,n}=0\\ \text{bzw.}\ n=0}\right)}} \Big(U\Pi U^\dagger\Big|\zeta_{c,0}\Big)\Big(\zeta_{c,0}\Big|U\Pi U^\dagger\Big)}_{H_{\text{Nullmode}}} \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \\
&= \big\langle \widetilde{\mathbf{phys}} \big| H_{\text{Coul}} + H_{\text{Nullmode}} \big|\widetilde{\mathbf{phys}}\big\rangle \quad , \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

wobei sich die Restriktionen in den Summen bezüglich μ auf die Axiale Eichung und bezüglich n auf die Palumbo-Eichung beziehen.
H_{Nullmode} ist definiert als der Anteil des kinetischen Terms der Eichfelder, der aus Entwicklungskoeffizienten von $U\Pi U^\dagger$ besteht, die wir im physikalischen Sektor *nicht* durch andere Freiheitsgrade ausdrücken können. Führen wir Abkürzungen für diese Entwicklungskoeffizienten ein,

$$
\begin{aligned}
\text{Axiale Eichung:} \qquad & p^{c_0} &:=& \sqrt{L}\Big(\zeta_{c_0,0}\Big|U_{[\xi_{\text{Ax}}]}\Pi U^\dagger_{[\xi_{\text{Ax}}]}\Big) \quad , \qquad (2.42)\\
\text{Palumbo-Eichung:} \qquad & p_{c,0} &:=& \sqrt{L}\Big(\zeta_{c,0}\Big|U_{[\xi_{\text{Pal}}]}\Pi U^\dagger_{[\xi_{\text{Pal}}]}\Big) \quad , \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

so schreibt sich H_{Nullmode} — diesmal nach Axialer und Palumbo-Eichung unterschieden — in der Form

$$
\begin{aligned}
H^{\text{Axial}}_{\text{Nullmode}} &= \frac{1}{2L}\sum_{c_0} p^{c_0\dagger}p^{c_0} \quad , \qquad (2.44)\\
H^{\text{Palumbo}}_{\text{Nullmode}} &= \frac{1}{2L}\sum_{c} p^\dagger_{c,0}p_{c,0} \quad . \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

Es sei angemerkt, daß für die Entwicklungskoeffizienten aus (2.42), (2.43) folgende Relationen gelten, die sie im wesentlichen als konjugierte Variablen der nach der Eichfixierung verbliebenden Eichfreiheitsgrade auszeichnen,

$$
\begin{aligned}
\text{Axiale Eichung:} \qquad & \Big[p^{c_0}\ ,\ a^{c_0}\Big] = \frac{1}{i} \quad , \qquad (2.46)\\
\text{Palumbo-Eichung:} \qquad & \Big[\sum_c z_c^b\, p_{c,0}\ ,\ \frac{\theta^a}{L}\Big] = \frac{1}{i}\delta_{ab} \qquad \text{mit} \qquad z_c = e^{ig\Delta}\hat{z}_c e^{-ig\Delta} \qquad (2.47)\\
& \qquad\qquad (\hat{z}_c \text{ aus } (2.24)\ ) \quad .
\end{aligned}
$$

Der sogenannte Coulombterm[10] H_{Coul} ist definiert als der Anteil des kinetischen Terms der Eichfelder, der aus Entwicklungskoeffizienten von $U\Pi U^\dagger$ besteht, die wir im physikalischen

[10] In Anlehnung an den Term, den man nach dem gleichen Verfahren in der QED in der Coulomb-Eichung (in einer Kontinuumsformulierung) erhält und der allgemeinhin als Coulombpotential bezeichnet wird.→

Sektor durch andere Freiheitsgrade ausdrücken können. Die in $H_{\rm Coul}$ auftretenden Skalarprodukte ($\cdot$), die aufgrund ihrer Abhängigkeit von der Eichfunktion ξ für Axiale und Palumbo-Eichung unterschiedlich sind, lassen sich explizit ausschreiben. Man erhält, wenn man noch den expliziten Ausdruck für die Eigenwerte $\mu_{c_{(q,p)},n}$ aus (2.25) einsetzt,

$$H_{\rm Coul}^{\rm Axial} = \frac{g^2L}{4}\sum_{\substack{p,q\\a,b}}\frac{\lambda^a_{qp}}{2}\frac{\lambda^b_{pq}}{2}\int_0^L dxdy\,\rho^a_m(x)\rho^b_m(y)\frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{n=-\infty\\(p=q\Rightarrow n\neq 0)}}^{\infty}\frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x-y)}}{\left(n+\frac{gL}{2\pi}a_q-\frac{gL}{2\pi}a_p\right)^2}\;, \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}H_{\rm Coul}^{\rm Palumbo} = {} & \frac{g^2L}{4}\sum_{\substack{p,q\\a,b}}\left(e^{-ig\Delta}\frac{\lambda^a}{2}e^{ig\Delta}\right)_{qp}\left(e^{-ig\Delta}\frac{\lambda^b}{2}e^{ig\Delta}\right)_{pq}\\ & \times\int_0^L dxdy\,\rho^a_m(x)\rho^b_m(y)\frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x-y)}}{\left(n+\frac{gL}{2\pi}a_q-\frac{gL}{2\pi}a_p\right)^2}\quad .\end{aligned} \tag{2.49}$$

$e^{ig\Delta}$ ist die θ/L diagonalisierende Matrix (vgl.2.18). Man beachte, daß $\rho^a_m(x)$ i.allg. nicht mit $\rho^b_m(y)$ vertauscht. Vielmehr gilt,

$$\left[\rho^a_m(x),\rho^b_m(y)\right] = if^{abc}\rho^c_m(x)\delta(x-y)\quad . \tag{2.50}$$

Im Coulombpotential der Axialen Eichung wird nur im Falle $p=q$ der Term mit $n=0$ aus der Summe über n ausgeschlossen, im Coulombpotential der Palumbo-Eichung wird der $n=0$ Term dagegen stets weggelassen. Die Summen über n lassen sich explizit ausführen (vgl. [Sch93] und/oder [Jol61]). Man erhält, wenn man noch folgende sich als nützlich erweisende Reskalierung der Eichfreiheitsgrade a durchführt[11] ,

$$\hat{a}^{c_0} := \frac{gL}{2\pi}a^{c_0}\qquad\longrightarrow\qquad \hat{a}_q = \sum_{c_0=1}^{N-1}\hat{a}^{c_0}\frac{\lambda^{c_0}_{qq}}{2} = \frac{gL}{2\pi}a_q\quad , \tag{2.51}$$

für die Summen folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned}G^{\rm Axial}_{qp}(x-y) := {} & \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x-y)}}{\left(n+\hat{a}_q-\hat{a}_p\right)^2} \qquad ;\quad (q\neq p)\\ = {} & e^{-i\frac{2\pi}{L}(x-y)(\hat{a}_q-\hat{a}_p)}\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\pi(\hat{a}_q-\hat{a}_p)\right)}+i\frac{2}{L}(x-y)\cot\left(\pi(\hat{a}_q-\hat{a}_p)\right)-\frac{2}{L}|x-y|\right\},\end{aligned}$$

Gauß: $\partial_i\left[U\Pi^l_iU^\dagger\right]\big|\mathbf{phys}\big\rangle = -e\rho\big|\mathbf{phys}\big\rangle \;\Rightarrow$

$$\big\langle\mathbf{phys}\big|U\left[\int d^3x\frac{1}{2}\Pi^l_i\Pi^l_i\right]U^\dagger\big|\mathbf{phys}\big\rangle = \big\langle\mathbf{phys}\big|\frac{e^2}{8\pi}\int d^3xd^3y\,\frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big|\mathbf{phys}\big\rangle\,.$$

[11]Es sei angemerkt, daß die reskalierten Eichfreiheitsgrade in der Literatur ([Len91], [Sch93], [Eng94], [Sto94]) mit c bezeichnet werden. Wir weichen von dieser Bezeichnungsweise ab, um Verwechslungen mit dem Index c zu vermeiden, der zur Klassifizierung der Eigenwerte $\mu_{c,n}$ dient.

$$G_{qp}^{\text{Palumbo}}(x-y) := \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x-y)}}{\left(n+\hat{a}_q-\hat{a}_p\right)^2} \qquad ; \quad (q \neq p) \tag{2.52}$$

$$= G_{qp}^{\text{Axial}}(x-y) - \frac{1}{\pi^2\left(\hat{a}_q-\hat{a}_p\right)^2} \quad , \tag{2.53}$$

$$G_{qq}^{\text{Ax/Pal}}(x-y) := \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x-y)}}{n^2} - \frac{1}{3} \qquad = -2\frac{|x-y|}{L} + 2\left(\frac{x-y}{L}\right)^2 \quad , \tag{2.54}$$

wobei wir die Gelegenheit genutzt haben, für die auftretenden länglichen Ausdrücke Abkürzungen einzuführen. Es sei angemerkt, daß der konstante Term $\frac{1}{3}$ in die Definition von $G_{qq}^{\text{Ax/Pal}}$ aufgenommen wurde, da ein konstanter Term in der Summe in $H^{\text{Ax/Pal}}$ aufgrund der Rest-Gauß-Gesetze (zumindestens) für die SU(2) im physikalischen Sektor verschwindet. Damit kann die Summe in (2.54) im physikalischen Sektor durch $G_{qq}^{\text{Ax/Pal}}$ ersetzt werden. Man beachte außerdem die Gültigkeit der nützlichen Relationen,

$$G_{qp}^{\text{Ax/Pal}}(x-y) = G_{pq}^{\text{Ax/Pal}}(y-x) \qquad \forall q,p \quad , \tag{2.55}$$

$$G_{qq}(0) = 0 \quad . \tag{2.56}$$

Dirac+Kopplungsterm transformieren sich unter der unitären Eichfixierungstransformation per Konstruktion[12] von $U_{[\xi_{\text{Ax/Pal}}]}$ in

$$U_{[\xi_{\substack{\text{Ax}\\ \text{Pal}}}]}\Big[-i\psi^\dagger\alpha\Big(\partial_x - igA\Big)\psi\Big]U^\dagger_{[\xi_{\substack{\text{Ax}\\ \text{Pal}}}]} = -i\psi^\dagger\alpha\Big(\partial_x - ig\,{}^{\textstyle a}_{\textstyle \theta/L}\Big)\psi \quad . \tag{2.57}$$

Der Masseterm ist invariant unter $U_{[\xi]}$. Man erhält somit für die transformierten Hamilton-Operatoren

$$H^{\text{Axial}} = U[\xi_{\text{Ax}}]HU^\dagger[\xi_{\text{Ax}}] \quad , \tag{2.58}$$

$$H^{\text{Palumbo}} = U[\xi_{\text{Pal}}]HU^\dagger[\xi_{\text{Pal}}] \tag{2.59}$$

folgende Ausdrücke im transformierten physikalischen Sektor,

$$\boxed{H^{\text{Axial}} = \int_0^L dx\Big\{-i\psi^\dagger\alpha\Big(\partial_x - iga\Big)\psi + m\psi^\dagger\beta\psi\Big\} + \frac{1}{2L}\sum_{c_0} p^{c_0\dagger}p^{c_0} + H_{\text{Coul}}^{\text{Axial}}} \tag{2.60}$$

$$\boxed{H^{\text{Palumbo}} = \int_0^L dx\Big\{-i\psi^\dagger\alpha\Big(\partial_x - ig\frac{\theta}{L}\Big)\psi + m\psi^\dagger\beta\psi\Big\} + \frac{1}{2L}\sum_{c} p^\dagger_{c,0}p_{c,0} + H_{\text{Coul}}^{\text{Palumbo}}} \tag{2.61}$$

mit $H_{\text{Coul}}^{\text{Ax}}$ aus (2.48) und $H_{\text{Coul}}^{\text{Palumbo}}$ aus (2.49).

[12] Siehe dazu [See95].

Kapitel 3

Die kinetische Energie der Nullmoden

Wir betrachten die Terme $H^{\rm Axial}_{\rm Nullmode}$ und $H^{\rm Palumbo}_{\rm Nullmode}$, die aus der kinetischen Energie der Eichfelder herrührten und daher die kinetische Energie der Nullmoden darstellen. Nach (2.46) bilden p^{c_0} und a^{c_0} einen Satz von konjugierten Variablen, so daß wir in einer Schrödingerdarstellung in der Axialen Eichung schreiben können,

$$H^{\rm Axial}_{\rm Nullmode} = \frac{1}{2L}\sum_{c_0} p^{c_0\dagger}p^{c_0} \simeq \frac{1}{2L}\sum_{c_0} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a^{c_0}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial a^{c_0}} \quad . \tag{3.1}$$

Ähnlich erhalten wir unter Ausnutzung von (2.47) und der Orthogonalitätsrelation $z^{a*}_c z^a_{c'} = \delta_{cc'}$ in der Palumbo-Eichung,

$$H^{\rm Palumbo}_{\rm Nullmode} = \frac{1}{2L}\sum_{c} p^\dagger_{c,0}p_{c,0} \simeq \frac{L}{2}\sum_{a=1}^{N^2-1} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta^{a}}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta^{a}} \quad . \tag{3.2}$$

Dies sind *nicht* die Standardformen kinetischer Energien (=2.Ableitungen) und es ist nicht möglich solche Standardformen durch einfache partielle Integrationen zu erreichen. Der Grund hierfür ist eine eichfeldabhängige Jacobideterminante, die aus dem Prozeß der Eichfixierung herrührt. Zur genaueren Erklärung schreiben wir das Matrixelement des Hamilton-Operators durch Einschub von vollständigen Sätzen als funktionales Integral in einer Schrödingerdarstellung,

$$\begin{aligned}\big\langle \mathbf{phys}\big| H_{(\hat A^a_{(x)},\hat\Pi^a_{(x)})}\big|\mathbf{phys}\big\rangle &= \int\left(\prod_{\substack{y,b\\z,c}} dA^b(y)dA'^c(z)\right) \quad \big\langle \mathbf{phys}\big|A'\big\rangle\big\langle A'\big|H\big|A\big\rangle\big\langle A\big|\mathbf{phys}\big\rangle \\ &= \int\left(\prod_{y,b} dA^b(y)\right) \quad \mathbf{phys}^*\big(A\big)\ H\Big(A^a_{(x)},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A^a_{(x)}}\Big)\ \mathbf{phys}\big(A\big)\ ,\end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei

$$\big|A\big\rangle \equiv \prod_{y,b} \big|A^b(y)\big\rangle \quad , \tag{3.4}$$

$$\mathbf{phys}(A) = \big\langle A\big|\mathbf{phys}\big\rangle \quad , \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\big\langle A'\big|\hat{A}^a(x)\big|A\big\rangle &= \big\langle A'^a(x)\big|\hat{A}^a(x)\big|A^a(x)\big\rangle \prod_{(y,b)\neq(x,a)} \big\langle A'^b(y)\big|A^b(y)\big\rangle \\ &= A^a(x)\prod_{y,b}\delta\big(A^b_{(y)} - A'^b_{(y)}\big) \quad ,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\big\langle A'\big|\hat{\Pi}^a(x)\big|A\big\rangle &= \big\langle A'^a(x)\big|\hat{\Pi}^a(x)\big|A^a(x)\big\rangle \prod_{(y,b)\neq(x,a)} \big\langle A'^b(y)\big|A^b(y)\big\rangle \\ &= \frac{1}{i}\Big(\frac{\delta}{\delta A'^a_{(x)}}\delta\big(A'^a_{(x)} - A^a_{(x)}\big)\Big) \prod_{(y,b)\neq(x,a)} \delta\big(A^b_{(y)} - A'^b_{(y)}\big) \quad .\end{aligned} \tag{3.7}$$

Man besitzt die Freiheit vom Parametersatz[1] $A^a(x)$ auf den Parametersatz $\tau^b(y)$ zu wechseln, wobei τ durch (2.16) gegeben ist. Aus dem Wechsel des Parametersatzes resultiert eine eichfeldabhängige Jacobideterminante,

$$\big\langle \mathbf{phys}\big|H\big|\mathbf{phys}\big\rangle \simeq \int \prod_{y,b} d\tau^b(y) \left|\det \frac{\delta A^a(x)}{\delta \tau^b(y)}\right| \mathbf{phys}^*\big(\tau^b(y)\big)\ H\ \mathbf{phys}\big(\tau^b(y)\big) \quad . \tag{3.8}$$

Fixiert man nun die Eichung mit der Eichfunktion ξ aus (2.14) bis zur Palumbo-Eichung, so ist der transformierte Hamilton-Operator im Eichfeldsektor nur noch abhängig von $\theta \simeq \tau(L)$. Die Eichfreiheitsgrade $\tau(y \neq L)$ lassen sich ausintegrieren und man erhält (bis auf irrelevante Faktoren)

$$\big\langle \widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big|UHU^\dagger\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big\rangle \simeq \int d\theta^b \left|\det \frac{\delta A^a(x)}{\delta \theta^b}\right| \widetilde{\mathbf{phys}}^*_{\text{Pal}}(\theta^b)\ \big[UHU^\dagger\big]\ \widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}(\theta^b) \quad . \tag{3.9}$$

Insbesondere für die kinetische Energie der Nullmoden in der Palumbo-Eichung lautet diese Relation,

$$\begin{aligned}\big\langle \widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big|\frac{1}{2L}\sum_c p^\dagger_{c,0}p_{c,0}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big\rangle &= \frac{1}{2L}\sum_c \big\langle p_{c,0}\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big|p_{c,0}\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\big\rangle \\ &\simeq \int d\theta^b\ \mathcal{J}_{\text{Pal}}\frac{L}{2}\sum_a \left(\frac{\partial}{\partial\theta^a}\widetilde{\mathbf{phys}}^*_{\text{Pal}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^a}\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei die Jacobideterminante $\mathcal{J}_{\text{Pal}} := \left|\det \frac{\delta A^a(x)}{\delta\theta^b}\right|$, wie in [Len94.2] gezeigt wird, folgende explizite Form hat,

$$\mathcal{J}_{\text{Pal}} = \prod_{k>l} \frac{\sin^2\left(\frac{gL}{4}\sum_{c_0} a^{c_0}(\lambda^{c_0}_{ll} - \lambda^{c_0}_{kk})\right)}{\left(\frac{gL}{4}\right)^2\left[\sum_{c_0} a^{c_0}(\lambda^{c_0}_{ll} - \lambda^{c_0}_{kk})\right]^2} \quad . \tag{3.11}$$

[1]Parametrisiert werden die Gruppenelemente der SU(N).

Auf die gleiche Weise ergibt sich in der Axialen Eichung für die kinetische Energie der Nullmoden,

$$\big\langle \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \big| \frac{1}{2L} \sum_{c_0} p^{c_0 \dagger} p^{c_0} \big| \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \big\rangle \simeq \int da^{c_0} \; \mathcal{J}_{\mathrm{Ax}} \frac{1}{2L} \sum_{c_0} \left(\frac{\partial}{\partial a^{c_0}} \widetilde{\mathbf{phys}}^{*}_{\mathrm{Ax}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial a^{c_0}} \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \right) \tag{3.12}$$

mit (siehe [Len94.2])

$$\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}} = \prod_{k>l} \sin^2 \left(\frac{gL}{4} \sum_{c_0} a^{c_0} (\lambda^{c_0}_{ll} - \lambda^{c_0}_{kk}) \right) \quad . \tag{3.13}$$

Wir betrachten den Ausdruck (3.12) in der Axialen Eichung. Man möchte die Jacobideterminante $\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}$ in die Wellenfunktion $\widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}}$ absorbieren, um effektiv eine flache Geometrie für die Eichfeldvariablen a^{c_0} zu erhalten. Es wird dann durch einfache partielle Integration möglich sein, aus dem kinetischen Energieterm der Nullmoden einen Term in der Standardform einer 2. Ableitung zu bekommen. Damit wird man sich im weiteren auf die Diskussion eines gewöhnlichen Eigenwertproblems $H \; \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} = E \; \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}}$ beschränken können. Definieren wir $\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}}$ durch

$$\widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}} \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \quad , \tag{3.14}$$

so schreibt sich (3.12) in der Form

$$\begin{aligned} \big\langle \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \big| H^{\mathrm{Axial}}_{\mathrm{Nullmode}} \big| \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \big\rangle \simeq & \int da^{c_0} \; \mathcal{J}_{\mathrm{Ax}} \frac{1}{2L} \sum_{c_0} \left[\frac{\partial}{\partial a^{c_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}} \widehat{\mathbf{phys}}^{*}_{\mathrm{Ax}} \right) \right] \left[\frac{\partial}{\partial a^{c_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}} \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \right) \right] \\ = & \int da^{c_0} \underbrace{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}} \tfrac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}} \tfrac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}}}_{1} \left[\frac{1}{2L} \sum_{c_0} \left(\frac{\partial}{\partial a^{c_0}} \widehat{\mathbf{phys}}^{*}_{\mathrm{Ax}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial a^{c_0}} \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \right) + \mathbf{REST} \right], \end{aligned} \tag{3.15}$$

wobei sich die in **REST** zusammengefaßten Terme schreiben lassen als

$$\mathbf{REST} = \widehat{\mathbf{phys}}^{*}_{\mathrm{Ax}} \; \mathrm{V}^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{eff}} \; \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \tag{3.16}$$

mit

$$\mathrm{V}^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2L} \sum_{c_0=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}} \frac{\partial^2 \sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}}{\left(\partial a^{c_0}\right)^2} \quad . \tag{3.17}$$

Den Ausdruck $\mathrm{V}^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{eff}}$, der der (ursprünglichen) Geometrie der Eichfreiheitsgrade a^{c_0} Rechnung trägt, bezeichnet man als effektives Potential. Mit $\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}$ aus (3.13) läßt sich $\mathrm{V}^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{eff}}$ bestimmen. Wie in [Len94.2] gezeigt wird, erhält man in der Axialen Eichung für eine SU(N)-Theorie stets eine Konstante für $\mathrm{V}^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{eff}}$. In 1+1 Dimensionen ergibt sich,

$$\mathrm{V}^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{eff}} = -\frac{g^2 L}{48} N \big(N^2 - 1 \big) \quad . \tag{3.18}$$

Auch wenn dieser konstante Term im Hamilton-Operator weggelassen werden kann, so hat die Absorption der Jacobideterminante in die Wellenfunktion die Konsequenz, daß die neuen Wellenfunktionen $\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} = \sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}}\widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}}$ an den Nullstellen der Jacobideterminante verschwinden müssen,

$$\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}}(a^{c_0}) = 0 \qquad \text{wenn} \qquad \mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}(a^{c_0}) = 0 \quad , \quad c_0 = 1, \ldots, N-1 \quad . \tag{3.19}$$

Über diese Randbedingung an die physikalischen Zustände besitzt die (ursprüngliche) Geometrie der Eichfreiheitsgrade a^{c_0} einen Einfluß auf deren Dynamik.
Da wir uns ab dem nächsten Abschnitt in unserer Diskussion auf die SU(2) beschränken werden, fassen wir in der Axialen Eichung für die SU(2) zusammen. Mit dem effektiven Potential $-\frac{g^2L}{8}$ und der reskalierten Eichfeldvariable $\hat{a}^{c_0} = \frac{gL}{2\pi}a^{c_0}$ ergibt sich nach nun problemloser partieller Integration[2] in (3.15),

$$\boxed{\left\langle \hat{a}^{c_0} \middle| H^{\mathrm{Axial}}_{\mathrm{Nullmode}} \middle| \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \right\rangle = \left(-\frac{g^2L}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\left(\partial \hat{a}^{c_0}\right)^2} - \frac{g^2L}{8} \right) \widehat{\mathbf{phys}}(\hat{a}^{c_0})} \tag{3.20}$$

[3]mit der Randbedingung

$$\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}}(\hat{a}^{c_0} = n \in Z)\big) = 0 \quad . \tag{3.21}$$

In der gleichen Weise wie in der Axialen Eichung geht man in der Palumbo-Eichung vor. Durch Absorption von $\mathcal{J}_{\mathrm{Pal}}$ aus (3.11) in die Wellenfunktion,

$$\overline{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} = \sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Pal}}}\widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \quad , \tag{3.22}$$

ergibt sich innerhalb der SU(2) das effektive Potential ebenfalls zu

$$\mathrm{V}^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{eff}} = \frac{L}{2} \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Pal}}}} \frac{\partial^2 \sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Pal}}}}{\left(\partial \theta^a\right)^2} = -\frac{g^2L}{8} \quad . \tag{3.23}$$

Damit läßt (3.10) sich schreiben als[4]

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \middle| H^{\mathrm{Palumbo}}_{\mathrm{Nullmode}} \middle| \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \right\rangle &\simeq \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \mathcal{J}_{\mathrm{Pal}} \frac{L}{2} \left(\vec{\nabla}_\theta \widetilde{\mathbf{phys}}^*_{\mathrm{Pal}} \right) \left(\vec{\nabla}_\theta \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \right) \\ &= \int d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \, \overline{\mathbf{phys}}^*_{\mathrm{Pal}} \left(-\frac{L}{2}\Delta_\theta - \frac{g^2L}{8} \right) \overline{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Es ist unser Ziel, die Palumbo-Eichung mit der Axialen Eichung zu vergleichen. Wir wechseln daher vom Parametersatz θ^a auf den Parametersatz $(\hat{a}^{c_0}, \phi^a)$, wobei wir zunächst nur

[2]Da a^{c_0} periodisch ist, tritt auch ohne besondere Bedingungen an die Wellenfunktion bei der partiellen Integration kein Oberflächenterm auf. Die Periodizität von a^{c_0} folgt aus der Mehrdeutigkeit in der Definition von a als diagonalisierte Form von θ/L, wobei θ lediglich über die Exponentialfunktion definiert war: $e^{ig\theta} = e^{ig\tau(L)}$.

[3]Es ist $\langle \hat{a}^{c_0} | \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \rangle = \sqrt{J_{\mathrm{Ax}}} \langle \hat{a}^{c_0} | \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax}} \rangle$.

[4]Der Oberflächenterm läßt sich wegdiskutieren! (Partielle Integration über $\hat{a}^{c_0}$ in (3.29) führt aufgrund der Periodizität von $\hat{a}^{c_0}$ zu keinem Oberflächenterm.)

wissen, daß $\hat{a}^{c_0} = \frac{gL}{2\pi} a^{c_0}$ den Parameter a^{c_0} beinhaltet, der das diagonalisierte θ/L beschreibt (Gl.2.18), und die $N^2 - N = 2$ Parameter ϕ^a die Parametrisierung der Eichfreiheitsgrade vervollständigen[5]. Explizite Diagonalisierung von $\frac{\theta}{L} = \sum_{a=1}^{3} \frac{\theta^a}{L} \frac{\lambda^a}{2}$ ergibt[6] für a^{c_0},

$$La^{c_0} = \sqrt{\sum_{a=1}^{3} \theta^a \theta^a} =: r \quad . \tag{3.25}$$

Da a^{c_0} radialartigen Charakter hat, wählen wir als neuen Parametersatz sphärische Polarkoordinaten $(\hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi)$. Mit dem Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten[7]

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \,\cdot) - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \quad , & (3.26)\\
\hat{L}^2 &= \left(\frac{1}{i} \vec{\theta} \times \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} \right)^2 \\
&= - \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \quad , & (3.27)\\
r &= \frac{2\pi}{g} \hat{a}^{c_0} & (3.28)
\end{aligned}$$

ergibt sich aus (3.24) bis auf irrelevante Faktoren[8],

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \middle| H^{\mathrm{Palumbo}}_{\mathrm{Nullmode}} \middle| \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \right\rangle &\simeq \int d\hat{a}^{c_0} d\vartheta d\varphi \;\; (\hat{a}^{c_0})^2 \sin\vartheta \\
\times\, \overline{\mathbf{phys}}^{\,*}_{\mathrm{Pal}} \Bigg[- \frac{g^2 L}{8\pi^2} \frac{1}{\hat{a}^{c_0}} \frac{\partial^2}{(\partial \hat{a}^{c_0})^2} &\left(\hat{a}^{c_0} \overline{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \right) + \left(\frac{g^2 L}{8\pi^2} \frac{\hat{L}^2}{(\hat{a}^{c_0})^2} - \frac{g^2 L}{8} \right) \overline{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \Bigg] . \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Wollen wir, daß der Zusammenhang zwischen Axialer und Palumbo-Eichung noch deutlicher hervortritt, so bietet es sich an, den Faktor $(\hat{a}^{c_0})^2$ aus der Jacobideterminante wie in der Axialen Eichung in die Wellenfunktion aufzunehmen,

$$\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} = \hat{a}^{c_0} \overline{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \simeq \sqrt{\mathcal{J}_{\mathrm{Ax}}} \widetilde{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} \quad . \tag{3.30}$$

Wir erhalten damit die gleiche Randbedingung an physikalische Zustände wie in der Axialen Eichung,

$$\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}} (\hat{a}^{c_0} = n \in Z, \vartheta, \varphi) = 0 \quad . \tag{3.31}$$

[5]Es sei angemerkt, daß man in der Axialen Eichung in genau dieser Parametrisierung der Eichfreiheitsgrade arbeitet, nur kann hier, da der eichfixierte Hamilton-Operator nur noch von $\hat{a}^{c_0}$ abhängt, der lediglich von den Parametern ϕ^a abhängige Anteil im Integral ausintegriert bzw. vernachlässigt werden (ähnlich wie beim Übergang zur Palumbo-Eichung s.o.).

[6]Die λ^a sind in der SU(2) bei diagonalem λ^3 die Pauli-Spin-Matrizen.

[7]Beachte, daß sowohl der Radialanteil von Δ_θ als auch $\hat{L}^2$ für sich genommen bereits hermitesch sind.

[8]Irrelevant sind eichfeldunabhängige Faktoren in der Jacobideterminante, da diese für den gesamten Hamilton-Operator in gleicher Weise auftreten und anders als die eichfeldabhängigen Faktoren keine weiteren Konsequenzen haben können.

Mit der Redefinition (3.30) der Wellenfunktion erhält man unmittelbar aus (3.29),

$$\boxed{\left\langle \hat{a}^{c_0},\vartheta,\varphi \middle| H^{\text{Palumbo}}_{\text{Nullmode}} \middle| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}} \right\rangle = \left(-\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{(\partial\hat{a}^{c_0})^2} - \frac{g^2L}{8} + \frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\hat{L}^2}{(\hat{a}^{c_0})^2} \right) \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}(\hat{a}^{c_0},\vartheta,\varphi)} \quad . \tag{3.32}$$

Der kinetische Term der Nullmoden[9] in der Palumbo-Eichung unterscheidet sich somit von dem in der Axialen Eichung (Gl.3.20) lediglich um eine Art Zentrifugalbarriere $\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\hat{L}^2}{(\hat{a}^{c_0})^2}$.
Es sei angemerkt, daß wir den Drehimpulsoperator $\hat{L}^a_i = \frac{1}{i}\varepsilon^{abc}\theta^b\frac{\partial}{\partial\theta^c}$ im Zusammenhang mit dem Rest-Gauß-Gesetz in der Palumbo-Eichung[10] auch als gluonische Ladung Q^a_{Gluon} bezeichnet haben. Das Rest-Gauß-Gesetz (2.33) in der Palumbo-Eichung[11] $gQ^a_{\text{Gluon}}\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}} = -gQ^a_{\text{Quark}}\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}$ ermöglicht es uns daher, $\hat{L}^2$ in (3.32) durch $(Q_{\text{Quark}})^2$ zu ersetzen[12] .
Noch ein Wort zur reskalierten Eichfeldvariable $\hat{a}^{c_0} = \frac{gL}{2\pi}a^{c_0}$. Nach dem Prozeß der Eichfixierung besitzt der Hamilton-Operator (2.60) in der Axialen Eichung noch diskrete Restsymmetrien, die Displacementsymmetrie (auch Symmetrie der großen Eichtransformationen genannt) und eine Permutationssymmetrie in den N Farbindizes der SU(N). Diese Symmetrien spiegeln sich in der Mehrdeutigkeit der Definition des Eichfeldes $a = a^{c_0}\frac{\lambda^{c_0}}{2}$ ($SU(2)$: $c_0 = 3, \lambda^3 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$) als diagonalisierte Form von θ/L wider ($\leftrightarrow$ Permutationssymmetrie in den Basisvektoren der diagonalisierenden Matrix $\Leftrightarrow$ Permutationssymmetrie in den Basisvektoren von a), wobei θ wiederum nur über die Exponentialfunktion definiert war (Gl.2.17) ($\leftrightarrow$ Displacement-Symmetrie). Das Eichfeld a transformiert sich innerhalb der SU(2) unter diesen Restsymmetrien wie folgt,

$$\begin{aligned}
\text{Displacement-Symmetrie:} \qquad a \quad &\longrightarrow \quad a' = e^{\frac{2\pi ixm}{L}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)}\left(a+\frac{i}{g}\partial_x\right)e^{-\frac{2\pi ixm}{L}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)} \\
&\qquad\quad\;\; = a + \frac{2\pi m}{gL}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad , \; m\in Z \quad , \\
\text{bzw.} \quad \hat{a}^{c_0} &\longrightarrow \hat{a}'^{c_0} = \hat{a}^{c_0} + 2m \quad ,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

[9]Man mag sich darüber wundern, daß der kinetische Term der Nullmoden in der Palumbo-Eichung aufgrund des Terms $\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\hat{L}^2}{(\hat{a}^{c_0})^2}$ nicht periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ ist (vgl. unten). Eine etwas nachlässige Rechnung lieferte an dieser Stelle tatsächlich den periodischen Ausdruck $\frac{g^2L}{8}\frac{\hat{L}^2}{\sin^2(\pi\hat{a}^{c_0})}$ (d.h. man erhielt insgesamt den Laplace-Operator auf der Gruppe SU(2)) und sorgte für einige Zeit für Verwirrung. Es konnte jedoch explizit gezeigt werden, daß im physikalischen Sektor der nicht-periodische Anteil des kinetischen Terms der Nullmoden durch einen entsprechenden Term im Coulombpotential kompensiert wird, so daß der Gesamt-Hamilton-Operator periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ ist.

[10]Spezialisierung von (2.36) auf die SU(2)!

[11]Die Jacobideterminante $\mathcal{J}_{\text{Ax}}$ vertauscht trivialerweise mit Q^a_{Quark} und Q^a_{Gluon}, da sie nur von a^{c_0} abhängig ist.

[12]Bei solchen Schlußfolgerungen aus Operatorgleichungen, die nur auf einem eingeschränkten Bereich (nämlich auf dem physikalischen Sektor) gültig sind, ist etwas Vorsicht geboten. Entscheidend ist hier, daß Q^a_{Quark} mit Q^a_{Gluon} kommutiert:

$$Q^a_{\text{Quark}}\big|\mathbf{phys}\big\rangle = -Q^a_{\text{Gluon}}\big|\mathbf{phys}\big\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (Q_{\text{Quark}})^2\big|\mathbf{phys}\big\rangle = -Q^a_{\text{Quark}}Q^a_{\text{Gluon}}\big|\mathbf{phys}\big\rangle \\ -(Q_{\text{Gluon}})^2\big|\mathbf{phys}\big\rangle = Q^a_{\text{Gluon}}Q^a_{\text{Quark}}\big|\mathbf{phys}\big\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow (Q_{\text{Quark}})^2\big|\mathbf{phys}\big\rangle = (Q_{\text{Gluon}})^2\big|\mathbf{phys}\big\rangle \ .$$

$$\text{Permutationssymmetrie:} \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a^{c_0}\frac{\lambda^{c_0}}{2} \qquad \rightarrow \qquad a' = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} = a'^{c_0}\frac{\lambda^{c_0}}{2} \quad ,$$
$$\text{bzw.} \quad \hat{a}^{c_0} \quad \rightarrow \quad \hat{a}'^{c_0} = -\hat{a}^{c_0} \quad . \tag{3.34}$$

In der Palumbo-Eichung mit den Eichfeldvariablen $(\hat{a}^{c_0}, \varphi, \vartheta)$ besitzt $\hat{a}^{c_0}$ für alle Werte von φ und ϑ die gleichen Symmetrien wie in der Axialen Eichung.
Wir können den Definitionsbereich von $\hat{a}^{c_0}$ durch Kombination der beiden Symmetrien auf das Intervall $[0, 1]$ einschränken, wobei die Endpunkte des Intervalls miteinander zu identifizieren sind. $\hat{a}^{c_0}$ ist dann auf einem Kreis definiert. Aufgrund der aus der Jacobideterminanten resultierenden Randbedingung an die Wellenfunktion $\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Ax/Pal}}$ bei allen ganzzahligen Werten von $\hat{a}^{c_0}$ zu verschwinden, ist es nicht notwendig, eine Windungszahl n für $\hat{a}^{c_0}$ einzuführen, die angibt, wie oft der $\hat{a}^{c_0}$ definierende Kreis umlaufen worden ist. Wellenfunktionen mit einer Abhängigkeit von $\hat{a}^{c_0}$ mit unterschiedlicher Windungszahl besitzen aufgrund der Randbedingung stets einen verschwindenen Überlapp,

$$\left\langle n \,\middle|\, H \,\middle|\, m \right\rangle = 0 \qquad , \quad n \neq m \quad . \tag{3.35}$$

Kapitel 4

Der statische Limes der SU(2)-QCD_{1+1}

4.1 Hamilton-Operator und Vakuum im statischen Limes

Zur Erklärung der Approximation des statischen Limes betrachten wir den Hamilton-Operator (2.1) vor der Eichfixierung.

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Kopplung}} + H_{\text{Eich}} \tag{4.1}$$

mit

$$\begin{aligned} H_{\text{Dirac}} &= \int dx \left(\psi^\dagger(x)\alpha p_x \psi(x) + m\psi^\dagger(x)\beta\psi(x) \right) \qquad ; \qquad p_x = -i\partial_x \quad , & (4.2)\\ H_{\text{Kopplung}} &= \int dx \left(-g j^a(x) A^a(x) \right) \qquad ; \quad j^a(x) = \psi_i^\dagger(x)\alpha\frac{\lambda^a_{ij}}{2}\psi_j \quad , & (4.3)\\ H_{\text{Eich}} &= \int dx\, \frac{1}{2}\Pi^a(x)\Pi^a(x) \quad . & (4.4) \end{aligned}$$

Als statischer Limes ist die Approximation $m \to \infty$ in der Weise definiert, daß der kinetische Energieterm der Quarks[1] $\psi^\dagger\alpha p_x\psi$ und der Quark-Farbstrom $j^a = \psi^\dagger\alpha\frac{\lambda^a}{2}\psi$ gegenüber dem Masseterm $m\psi^\dagger\beta\psi$ vernachlässigt werden können [Lev91]. Der Hamilton-Operator zerfällt damit in einen gluonischen und einen fermionischen Anteil $H_{\text{static}} = H_{\text{Eich}} + H_{\text{Quark}}$, die nur noch über das Gauß-Gesetz (2.2) miteinander verkoppelt sind.
Im statischen Limes ist die freie Dirac-Theorie bei der Wahl von diagonalem $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bereits diagonal in den Dirac-Komponenten von $\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$,

$$H_{\text{Dirac}}^{\text{statisch}} = \int dx\, m\big(\phi^\dagger(x)\phi(x) - \chi^\dagger(x)\chi(x)\big) \quad . \tag{4.5}$$

[1] Aus der Vernachlässigung von $p_x\psi = -i\partial_x\psi$ folgt, daß ψ (für alle Zeiten) konstant in x ist $\to$ statische Quarks.

Ähnlich wie bei der üblichen Diagonalisierung des Gesamt-Dirac-Hamiltonoperators H_{Dirac} in der Basis ebener Wellenlösungen der Diracgleichung, führt diese Form des Hamilton-Operators zur Einführung der Dirac-See und Interpretation der i-ten Komponente von $\chi(x)$ als Erzeuger für ein Antiteilchen der Farbe i am Raumpunkt x. Ein unendlicher Vakuumsbeitrag wird formal durch Übergang zum Normalprodukt beseitigt. $\phi_i^\dagger(x)$ kann als Erzeuger für ein Quark der Farbe i an der Stelle x interpretiert werden. Das Vakuum der freien Theorie enthält weder Quarks noch Antiquarks (gefüllte Dirac-See). Zur Vereinfachung der Notation bietet es sich an, $\chi(x)$ durch $\chi^\dagger(x)$ (und umgekehrt) zu ersetzen. Damit lautet der Dirac-Hamiltonoperator im statischen Limes,

$$H_m := \boldsymbol{:} H_{\text{Dirac}}^{\text{statisch}} \boldsymbol{:} \; = \int dx \; m\big(\phi_i^\dagger(x)\phi_i(x) + \chi_i^\dagger(x)\chi_i(x)\big) \quad . \tag{4.6}$$

Betrachten wir nun wieder die volle Theorie im statischen Limes. Im allgemeinen ist eine Wellenfunktion des Gesamtsystems ein Element des Tensorprodukts des fermionischen und des gluonischen Funktionenraumes, so daß sie sich durch Entwicklung nach vollständigen Sätzen darstellen läßt,

$$\Phi_{\text{ges}} = \sum_{ij} c_{ij} \; \big(\Phi_{\text{Ferm}}\big)_i \big(\Phi_{\text{Eich}}\big)_j \qquad , \quad c_{ij} \in C \quad . \tag{4.7}$$

Da der Hamilton-Operator im statischen Limes jedoch keinen Kopplungsterm besitzt, $H = H_{\text{Eich}} + H_{\text{Quark}}$, läßt sich ein Eigenzustand des Gesamtsystems zunächst als Produktzustand ansetzen, $\Phi_{\text{ges}} = \Phi_{\text{Eich}}\Phi_{\text{Ferm}}$. Physikalische Zustände unterliegen der Zwangsbedingung des Gauß-Gesetzes $G^a\big|\mathbf{phys}\big\rangle = 0$, so daß sie i.allg. nur durch eine Linearkombination von Produktzuständen (und damit in der allgemeinen Form (4.7)) gegeben sind. Insbesondere für das Vakuum der vollen Theorie lautet der Produktansatz,

$$\big|\mathbf{vac}\big\rangle = \big|\underset{\text{Eich}}{\mathbf{vac}}\big\rangle \big|\underset{\text{Ferm}}{\mathbf{vac}}\big\rangle \tag{4.8}$$

mit den Vakua $\big|\underset{\text{Eich}}{\mathbf{vac}}\big\rangle$ und $\big|\underset{\text{Ferm}}{\mathbf{vac}}\big\rangle$ der jeweils freien Theorie. Das physikalische Vakuum unterliegt zwar ebenfalls dem Gauß-Gesetz; der fermionische Anteil des Gauß-Operators vernichtet jedoch (nach Normalordnung) bereits den Produkt-Vakuumzustand (4.8), so daß das Gauß-Gesetz nur noch eine Zwangsbedingung an den gluonischen Anteil darstellt. Damit ist das Vakuum im fermionischen Sektor der für $m \to \infty$ vollen Theorie mit dem der freien Dirac-Theorie identisch[2].

Im statischen Limes in 1+1 Dimensionen treten im Eichsektor nur noch die konjugierten Impulse der Eichfelder auf (s.o). Diese gehen im Rahmen der Eichfixierung in die in den Kapiteln 3.1 und 3.2 abgeleiteten Ausdrücke über[3],

$$U_{[\xi]} H_{\text{Eich}} U_{[\xi]}^\dagger \big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ax/Pal}}\big\rangle = \Big(H_{\text{Coul}}^{\text{Ax/Pal}} + H_{\text{Nullmode}}^{\text{Ax/Pal}}\Big) \; \big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ax/Pal}}\big\rangle \quad , \tag{4.9}$$

[2] D.h. es gelten die Gleichungen (4.12).

[3] Eine einfache Ausnutzung des Gauß-Gesetzes ohne eine eichfixierende unitäre Transformation ersetzt den konjugierten Impuls Π nur durch einen Ausdruck mit dem Eichfeld A und führt damit nicht zur Elimination von Eichfreiheitsgraden.

wobei im Coulombpotential $H_{\rm Coul}^{\rm Ax/Pal}$, das nach den Gl.2.48, 2.49 einen fermionischen Anteil besitzt, ebenfalls eine Normalordnung durchzuführen ist und $U_{[\xi]} \equiv U[\xi_{\rm Ax/Pal}]$ durch (2.13) gegeben ist. Der Masseterm H_m ist invariant unter $U_{[\xi]}$, so daß der eichfixierte Gesamthamilton-Operator im statischen Limes gegeben ist durch,

$$\boxed{U_{[\xi]} H^{\rm statisch} U^\dagger_{[\xi]} \big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\rm Ax/Pal}\big\rangle = \Big(H_m + H_{\rm Coul}^{\rm Ax/Pal} + H_{\rm Nullmode}^{\rm Ax/Pal} \Big) \,\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\rm Ax/Pal}\big\rangle} \quad . \qquad (4.10)$$

Auch im fermionischen Anteil des eichfixierenden Operators $U_{[\xi]}$ ist die Normalordnung durchzuführen. Damit ist das Vakuum invariant unter $U_{[\xi]}$,

$$U_{[\xi]}\big|\mathbf{vac}\big\rangle = \left[1 - i \int_0^L dx \; g \; \boldsymbol{:}\rho_m^a\boldsymbol{:} \; \xi^a[A] + \ldots \right] \big|\mathbf{vac}\big\rangle = \big|\mathbf{vac}\big\rangle \quad . \qquad (4.11)$$

Also enthält auch das Vakuum der eichfixierten Theorie weder Quarks noch Antiquarks, so daß

$$\phi_i(x)\big|\mathbf{vac}\big\rangle = 0 \qquad , \qquad \chi_i(x)\big|\mathbf{vac}\big\rangle = 0 \qquad . \qquad (4.12)$$

Trotz der Invarianz des Vakuums unter $U_{[\xi]}$ ist die Eichfeldwellenfunktion für das Vakuum $\big\langle \hat{a}^{c_0} \big| \underset{\rm Eich}{\mathbf{vac}} \big\rangle$ bzw. $\big\langle \hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi \big| \underset{\rm Eich}{\mathbf{vac}} \big\rangle$ zunächst für Axiale und Palumbo-Eichung unterschiedlich, da in der Palumbo-Eichung noch zusätzlich zum Eichfreiheitsgrad $\hat{a}^{c_0}$ die Eichfreiheitsgrade ϑ und φ auftreten. Wir wollen nun die Eichfeldwellenfunktionen für das Vakuum $\underset{\rm Eich}{\mathbf{vac}}^{\rm Ax/Pal}$ bestimmen. Das Vakuum ist definiert als der Grundzustand der Theorie, d.h. als Eigenzustand des Gesamthamilton-Operators zum niedrigsten Eigenwert. Die Anteile des Gesamthamilton-Operators H_m und $H_{\rm Coul}^{\rm Ax/Pal}$ vernichten (nach der Normalordnung) das Vakuum. Damit sind $\underset{\rm Eich}{\mathbf{vac}}^{\rm Ax/Pal}$ die Eigenfunktionen der kinetischen Terme der Nullmoden $H_{\rm Nullmode}^{\rm Ax/Pal}$ zum jeweils niedrigsten Eigenwert.
Das Eigenwertproblem in der Axialen Eichung,

$$\big\langle \hat{a}^{c_0} \big| H_{\rm Nullmode}^{\rm Axial} \big| \mathbf{eigen}^{\rm Ax} \big\rangle \equiv \left(- \frac{g^2 L}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{(\partial \hat{a}^{c_0})^2} - \frac{g^2 L}{8} \right) \mathbf{eigen}^{\rm Ax}(\hat{a}^{c_0}) = E^{\rm Ax} \mathbf{eigen}^{\rm Ax}(\hat{a}^{c_0}) \quad (4.13)$$

mit der aus der Absorption der Jacobideterminante in die Wellenfunktion folgenden Randbedingung (3.21)

$$\mathbf{eigen}^{\rm Ax}(\hat{a}^{c_0} = n \in Z) = 0 \qquad (4.14)$$

wird gelöst durch[4]

$$\big\langle \hat{a}^{c_0} \big| \mathbf{eigen}_k^{\rm Ax} \big\rangle = \sqrt{2} \sin\left(k\pi \hat{a}^{c_0} \right) \qquad , \qquad E_k^{\rm Ax} = \frac{g^2 L}{8} k^2 - \frac{g^2 L}{8} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \quad , \qquad (4.15)$$

so daß $\underset{\rm Eich}{\mathbf{vac}}^{\rm Ax}$ als Eigenzustand zum niedrigsten Eigenwert gegeben ist durch

$$\underset{\rm Eich}{\mathbf{vac}}^{\rm Ax}(\hat{a}^{c_0}) = \big\langle \hat{a}^{c_0} \big| \mathbf{eigen}_{k=1}^{\rm Ax} \big\rangle \equiv \sqrt{2} \sin(\pi \hat{a}^{c_0}) \quad . \qquad (4.16)$$

[4] Die Normierung von $\big\langle \hat{a}^{c_0} \big| \mathbf{eigen}_j^{\rm Ax} \big\rangle$ erfolgt auf dem Intervall $\hat{a}^{c_0} \in [0, 1]$.

Das Eigenwertproblem in der Palumbo-Eichung

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi \middle| H^{\text{Palumbo}}_{\text{Nullmode}} \middle| \mathbf{eigen}^{\text{Pal}} \right\rangle &\equiv \left(-\frac{g^2 L}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{(\partial \hat{a}^{c_0})^2} - \frac{g^2 L}{8} + \frac{g^2 L}{8\pi^2} \frac{\hat{L}^2}{(\hat{a}^{c_0})^2} \right) \mathbf{eigen}^{\text{Pal}}(\hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi) \\ &= E^{\text{Pal}} \mathbf{eigen}^{\text{Pal}}(\hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi) \end{aligned} \tag{4.17}$$

wird gelöst durch (mit im Ursprung $\hat{a}^{c_0} = 0$ regulären aber nicht normierten Eigenzuständen) [Mes91]

$$\left\langle \hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi \middle| \mathbf{eigen}^{\text{Pal}}_{klm} \right\rangle = \hat{a}^{c_0} j_l(k\pi \hat{a}^{c_0}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \quad E^{\text{Pal}}(k) = \frac{g^2 L}{8} k^2 - \frac{g^2 L}{8} \quad , \quad k \in R_+ \tag{4.18}$$

mit den sphärischen Besselfunktionen j_l und den Kugelflächenfunktionen Y_{lm}. Das Rest-Gauß-Gesetz in der Palumbo-Eichung (2.33) wird nur von Eigenzuständen mit $l = 0$ erfüllt[5]. Die aus der Absorption der Jacobideterminante folgende Randbedingung (3.31)

$$\mathbf{eigen}^{\text{Pal}}_{k00}(\hat{a}^{c_0} = n \in Z, \vartheta, \varphi) = 0 \tag{4.19}$$

führt schließlich zu einem diskreten Spektrum E^{Pal}_k. Nach Normierung der Eigenzustände auf $\hat{a}^{c_0} \in [0, 1]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ erhält man somit

$$\left\langle \hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi \middle| \mathbf{eigen}^{\text{Pal}}_{k} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{2} \sin(k\pi \hat{a}^{c_0}) \quad , \quad E^{\text{Pal}}_k = \frac{g^2 L}{8} k^2 - \frac{g^2 L}{8} \quad , \quad k = 1, 2 \ldots \quad , \tag{4.20}$$

so daß $\underset{\text{Eich}}{\mathbf{vac}}^{\text{Pal}}$ als Eigenzustand zum niedrigsten Eigenwert gegeben ist durch

$$\underset{\text{Eich}}{\mathbf{vac}}^{\text{Pal}}(\hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi) = \left\langle \hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi \middle| \mathbf{eigen}^{\text{Pal}}_{k=1} \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{2} \sin(\pi \hat{a}^{c_0}) \quad . \tag{4.21}$$

Die Eichfeldwellenfunktion für das Vakuum in der Palumbo-Eichung ist somit bis auf eine andere Normierungskonstante gleich der in der Axialen Eichung.

4.2 Explizite Konstruktion physikalischer Zustände im statischen Limes

4.2.1 Axiale Eichung

Es ist unser Ziel, das Rest-Gauß-Gesetz (2.32), das die physikalischen Zustände in der Axialen Eichung bestimmt, in den Hamilton-Operator des physikalischen Sektors zu implementieren. Wir werden dies durch eine Projektion des Hamilton-Operators auf physikalische

[5] $(Q_{\text{Quark}})^2$ vernichtet (nach Normalordnung) bei Anwendung auf den fermionischen Sektor das Vakuum, so daß sich das Gauß-Gesetz auf eine Bedingung an die Vakuumeichfunktion $\underset{\text{Eich}}{\mathbf{vac}}^{\text{Pal}}$ reduziert: $\hat{L}^2 \underset{\text{Eich}}{\mathbf{vac}}^{\text{Pal}} = 0 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow m = 0$.

Zustände erreichen.
Das Rest-Gauß-Gesetz (2.32) nimmt für die SU(2) folgende Form an[6],

$$Q^3_{\text{Quark}}\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle = 0 \quad , \tag{4.22}$$

wobei sich $\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle$ bei Entwicklung nach im Raum der physikalischen Zustände vollständigen Sätzen des fermionischen und gluonischen Sektors schreiben läßt als

$$\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle = \sum_{lk} c_{lk}\, \big|\widehat{\mathbf{phys}}^{\text{Ax}}_{\text{Ferm}}\big\rangle_l \big|\widehat{\mathbf{phys}}^{\text{Ax}}_{\text{Eich}}\big\rangle_k \quad . \tag{4.23}$$

Die Komponenten von $Q^a_{\text{Quark}}(a = 1, 2, 3)$ genügen der SU(2)-Algebra (vgl. 2.39), so daß es möglich ist, gemeinsame Eigenzustände von Q^3_{Quark} und $(Q_{\text{Quark}})^2$ anzugeben,

$$Q^3_{\text{Quark}}\big|jm\big\rangle \;=\; m\;\big|jm\big\rangle \quad , \tag{4.24}$$

$$(Q_{\text{Quark}})^2\big|jm\big\rangle \;=\; j(j+1)\;\big|jm\big\rangle \quad . \tag{4.25}$$

Wir schließen unmittelbar aus dem Rest-Gauß-Gesetz (4.22), daß die den vollständigen Satz fermionischer Zustände bildenen $\big|\widehat{\mathbf{phys}}^{\text{Ax}}_{\text{Ferm}}\big\rangle_l$ Eigenzustände von Q^3_{Quark} zum Eigenwert 0 sind. Da Q^3_{Quark} und $(Q_{\text{Quark}})^2$ einen gemeinsamen Satz von Eigenzuständen besitzen, lassen sich die $\big|\widehat{\mathbf{phys}}^{\text{Ax}}_{\text{Ferm}}\big\rangle_l$ als Eigenzustände von $(Q_{\text{Quark}})^2$ zum Eigenwert $l(l + 1)$ *wählen*, so daß

$$\big|\widehat{\mathbf{phys}}^{\text{Ax}}_{\text{Ferm}}\big\rangle_l = \big|l\,0\big\rangle \quad . \tag{4.26}$$

Man zeigt leicht durch explizite Anwendung[7] von Q^3_{Quark} und $(Q_{\text{Quark}})^2$ auf Zustände der Art $\phi^\dagger_i(x_0)\big|\mathbf{vac}_{\text{Ferm}}\big\rangle$, die ein einzelnes Quark der Farbe i an der Stelle x_0 repräsentieren, daß solche Zustände Eigenzustände von Q^3_{Quark} und $(Q_{\text{Quark}})^2$ sind. Es gilt,

$$\big|jm\big\rangle \;=\; \big|\tfrac{1}{2}\,\text{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} \;=\; \phi^\dagger_2(x_0)\big|\mathbf{vac}_{\text{Ferm}}\big\rangle \quad , \tag{4.27}$$

$$\big|\tfrac{1}{2}\,\text{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} \;=\; \phi^\dagger_1(x_0)\big|\mathbf{vac}_{\text{Ferm}}\big\rangle \quad . \tag{4.28}$$

Um einen physikalischen Zustand $\big|l\,0\big\rangle$ aus diesen Zuständen zu konstruieren, muß man zumindestens 2 dieser Ein-Quark-Zustände nach den Gesetzen der Drehimpulsalgebra miteinander koppeln,

$$\big|0\,0\big\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big|\tfrac{1}{2}\,\text{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0}\big|\tfrac{1}{2}\,\text{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0} - \big|\tfrac{1}{2}\,\text{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0}\big|\tfrac{1}{2}\,\text{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\Big) \quad , \tag{4.29}$$

$$\big|1\,0\big\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big|\tfrac{1}{2}\,\text{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0}\big|\tfrac{1}{2}\,\text{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0} + \big|\tfrac{1}{2}\,\text{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0}\big|\tfrac{1}{2}\,\text{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\Big) \quad . \tag{4.30}$$

---

[6] $c_0 = 3$ in der SU(2) bei Darstellung der Generatoren durch Pauli-Spin-Matrizen.
Der Bezug zu (2.32) wird hergestellt durch: $\big\langle \hat{a}^{c_0}\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle = \sqrt{J_{\text{Ax}}}\big\langle \hat{a}^{c_0}\big|\widetilde{\mathbf{phys}}_{\text{Ax}}\big\rangle$.

[7] Dazu schreibe man (die relevanten Anteile von) Q^3_{Quark} und $(Q_{\text{Quark}})^2$ explizit durch die Erzeuger und Vernichter aus (vgl. 2.35, 2.5).

$|00\rangle$ gehört zum Singulett, $|10\rangle$ zum Triplett bei der Zerlegung des Tensorprodukts der beiden Spin$\frac{1}{2}$-Darstellungen in irreduzible Darstellungen. Man bezeichnet daher $|00\rangle$ als Singulett, $|10\rangle$ als Triplett-Zustand. Zustände, die sich im fermionischen Sektor aus den gekoppelten Wellenfunktionen zweier Quarks aufbauen, die also in der Axialen Eichung im fermionischen Sektor durch $|00\rangle$ und $|10\rangle$ gegeben sind, nennen wir SU(2)-Baryonen in Anlehnung an die gewöhnlichen Baryonen innerhalb der SU(3) [8]. Man hat also nach (4.23) für einen baryonischen Zustand,

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{baryon}^{\mathrm{Ax}}\right\rangle &= \sum_{l=0}^{1}\sum_k c_{lk}\,\left|l\,0\right\rangle \left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right\rangle_k \\ &= \sum_k \Big(\left|00\right\rangle, \left|10\right\rangle\Big)\cdot\begin{pmatrix} c_{0k} \\ c_{1k}\end{pmatrix} \left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right\rangle_k \quad . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Ein allgemeines Matrixelement des Hamilton-Operators zwischen zwei baryonischen Zuständen hat damit die Form,

$$\begin{aligned} &\left\langle\mathbf{baryon}^{\mathrm{Ax}}\middle|H^{\mathrm{Ax}}\middle|\mathbf{baryon}^{\mathrm{Ax}'}\right\rangle = \\ &\quad\sum_{k,k'} {}_k\!\left\langle\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right| \Big(c_{0k}, c_{1k}\Big) \underbrace{\begin{pmatrix}\langle 00| \\ \langle 10|\end{pmatrix}\mathbf{H}^{\mathrm{Ax}}\Big(\left|00\right\rangle, \left|10\right\rangle\Big)}_{\begin{pmatrix}\langle 00|H^{\mathrm{Ax}}|00\rangle & \langle 00|H^{\mathrm{Ax}}|10\rangle \\ \langle 10|H^{\mathrm{Ax}}|00\rangle & \langle 10|H^{\mathrm{Ax}}|10\rangle\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c'_{0k'} \\ c'_{1k'}\end{pmatrix} \left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right\rangle_{k'} \ , \end{aligned} \tag{4.32}$$

wobei

$$\begin{aligned} {}_k\!\left\langle\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right|\, XYZ \,\left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right\rangle_{k'} &= \int_0^1 d\hat{a}^{c_0} d\hat{a}^{c_0'}\, {}_k\!\left\langle\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\middle|\hat{a}^{c_0}\right\rangle\left\langle\hat{a}^{c_0}\right|\, XYZ\, \left|\hat{a}^{c_0'}\right\rangle\left\langle\hat{a}^{c_0'}\middle|\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}}^{\mathrm{Ax}}\right\rangle_{k'} \\ &= \int_0^1 d\hat{a}^{c_0}\ \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}\ k}^{\mathrm{Ax}\,*}(\hat{a}^{c_0})\ \ XYZ\ \ \widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Eich}\ k'}^{\mathrm{Ax}}(\hat{a}^{c_0}) \quad . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Die Projektion des Hamilton-Operators H^{Ax} auf den fermionischen 2-Quark-Sektor stellt die volle Implementierung des Rest-Gauß-Gesetzes dar und läßt sich explizit bestimmen. Dazu muß man zunächst die Zustände $|00\rangle$ und $|10\rangle$ explizit durch die auf das Vakuum wirkenden Quarkerzeuger ausdrücken (Gl.4.27, 4.28). Auch die fermionischen Anteile des Hamilton-Operators, das sind der Masseterm H_m und das Coulombpotential H_{Coul}, müssen explizit durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren niedergeschrieben werden (vgl. 2.48, 2.5, 4.6). Man zieht dann die Vernichtungsoperatoren aus H^{Ax} so lange an den Erzeugungsoperatoren in $|00\rangle$ und $|10\rangle$ vorbei, bis sie auf das Vakuum wirken und somit Null ergeben. Der kinetische Term der Nullmoden $H^{\mathrm{Ax}}_{\mathrm{Nullmode}}$, der keinen fermionischen Anteil besitzt, ist

[8] Ebenso ist natürlich die Kopplung von einem Quark und einem Antiquark zu einem physikalischen Zustand, den man dann als Meson bezeichnet, möglich (vgl. [Sch93]).

natürlich diagonal in $\big|00\big\rangle$ und $\big|10\big\rangle$. Insgesamt ergibt sich,

$$\begin{pmatrix} \langle 00|H^{\mathrm{Ax}}|00\rangle & \langle 00|H^{\mathrm{Ax}}|10\rangle \\ \langle 10|H^{\mathrm{Ax}}|00\rangle & \langle 10|H^{\mathrm{Ax}}|10\rangle \end{pmatrix} = \Bigg[\underbrace{-\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{(\partial\hat{a}^{c_0})^2} - \frac{g^2L}{8}}_{\text{von } H^{\mathrm{Axial}}_{\mathrm{Nullmode}}} + \underbrace{2m}_{\text{von } H_m} \Bigg] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ \overbrace{\frac{g^2L}{16} \begin{pmatrix} -G^{\mathrm{Ax}}_{11}(d) - \Big(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d) + G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\Big) + 2G^{\mathrm{Ax}}_{12}(0) & -\Big(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d) - G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\Big) \\ +\Big(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d) - G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\Big) & -G^{\mathrm{Ax}}_{11}(d) + \Big(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d) + G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\Big) + 2G^{\mathrm{Ax}}_{12}(0) \end{pmatrix}}^{\text{von } H^{\mathrm{Axial}}_{\mathrm{Coul}}} , \tag{4.34}$$

wobei G^{Ax}_{ij} durch die in (2.52, 2.54) angeführten Summen gegeben ist und $d := x_0 - y_0$ den „Abstand“[9] zwischen den beiden Quarks bezeichnet [10].

4.2.2 Palumbo-Eichung

Wir wollen in der Palumbo-Eichung in der gleichen Weise wie in der Axialen Eichung vorgehen. Es wird sich zeigen, daß wir baryonische Matrixelemente in der Palumbo-Eichung exakt in den Ausdruck (4.32) für solche Matrixelemente in der Axialen Eichung überführen können. Die Projektion des Hamilton-Operators auf physikalische Zustände stellt somit eine alternative Methode zur Eichfixierung mittels unitärer Transformationen dar. Zunächst stellt sich jedoch das Problem, die physikalischen Zustände zu konstruieren.
Die physikalischen Zustände in der Palumbo-Eichung werden durch das Rest-Gauß-Gesetz (2.33) bestimmt,

$$gQ^a_{\mathrm{ges}}\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\mathrm{Pal}}\big\rangle = 0 \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} Q^a_{\mathrm{ges}} &= Q^a_{\mathrm{Quark}} + Q^a_{\mathrm{Gluon}} \\ Q^a_{\mathrm{Gluon}} &\simeq \frac{1}{i}\varepsilon^{abc}\theta^b\frac{\partial}{\partial\theta^c} \qquad , \quad a = 1,2,3 \quad , \end{aligned} \tag{4.35}$$

[9] Es ist kein Abstand im mathematischen Sinne gemeint, wo stets $d(x,y) = d(y,x)$ gilt. Bei uns ist das Vorzeichen von d nicht ganz unwesentlich.

[10] Es sei angemerkt, daß man bei Transformation von $\left(H^{\mathrm{Axial}}_{\mathrm{Coul}}\right)_{ij}$ mit

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\pi\hat{a}^{c_0}\frac{d}{L}) & -i\sin(\pi\hat{a}^{c_0}\frac{d}{L}) \\ -i\sin(\pi\hat{a}^{c_0}\frac{d}{L}) & \cos(\pi\hat{a}^{c_0}\frac{d}{L}) \end{pmatrix}$$

und Einsetzen der expliziten Ausdrücke für G^{Ax}_{ij} aus (2.52, 2.54) den aus der Literatur ([Sch93], [Eng94]) bekannten Ausdruck erhält,

$$U\Big(H^{\mathrm{Axial}}_{\mathrm{Coul}}\Big)_{ij}U^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}g^2|d| - \frac{1}{8}g^2\frac{d^2}{L} & -i\frac{g^2d}{4}\cot(\pi\hat{a}^{c_0}) \\ i\frac{g^2d}{4}\cot(\pi\hat{a}^{c_0}) & \frac{g^2L}{4\sin^2(\pi\hat{a}^{c_0})} - \frac{1}{8}g^2|d| - \frac{1}{8}g^2\frac{d^2}{L} \end{pmatrix} .$$

wobei sich die $\left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\right\rangle$ nach im physikalischen Sektor vollständigen Sätzen entwickeln lassen,

$$\left\langle \hat{a}^{c_0}, \vartheta, \varphi \middle| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}} \right\rangle = \sum_{l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} k} c_{(l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} k)} \quad \Big| \underset{\text{Ferm}}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Quark}}} \Big\langle \vartheta, \varphi \Big| \underset{\text{Eich } 1}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Gluon}}} \Big\langle \hat{a}^{c_0} \Big| \underset{\text{Eich } 2}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{k} . \tag{4.36}$$

Da Q^a_{Quark} und Q^a_{Gluon} nach (2.39, 2.40) der SU(2)-Algebra genügen, gilt dies auch für $Q^a_{\text{ges}} = Q^a_{\text{Quark}} + Q^a_{\text{Gluon}}$. Daher ist das Rest-Gauß-Gesetz (4.35) äquivalent zu,

$$\begin{aligned} gQ^3_{\text{ges}} \left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\right\rangle &= 0 \quad , \\ g(Q_{\text{ges}})^2 \left|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Pal}}\right\rangle &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Andererseits folgt aus der Erfüllung der SU(2)-Algebra von $Q^a_{\text{ges}} = Q^a_{\text{Quark}} + Q^a_{\text{Gluon}}$, daß sich gemeinsame Eigenzustände von $(Q_{\text{Quark}})^2$, $(Q_{\text{Gluon}})^2$, $(Q_{\text{ges}})^2$ und Q^3_{ges} finden lassen,

$$Q^3_{\text{ges}} \left| l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} L_{\text{ges}} M_{\text{ges}} \right\rangle = M_{\text{ges}} \left| l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} L_{\text{ges}} M_{\text{ges}} \right\rangle \quad , \tag{4.38}$$

$$(Q_{\text{ges}})^2 \left| l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} L_{\text{ges}} M_{\text{ges}} \right\rangle = L_{\text{ges}}(L_{\text{ges}}+1) \left| l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} L_{\text{ges}} M_{\text{ges}} \right\rangle \quad . \tag{4.39}$$

Die (Q^a_{ges}, $a = 1, 2, 3$) hängen über die Komponenten des Drehimpulsoperators Q^a_{Gluon} lediglich von den gluonischen Freiheitsgraden ϑ und φ (aber nicht vom radialen Anteil $\hat{a}^{c_0}$) ab[11]. Wir schließen daher unmittelbar aus dem Rest-Gauß-Gesetz in der Form (4.37), daß bereits die Basisproduktzustände $\Big| \underset{\text{Ferm}}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Quark}}} \Big| \underset{\text{Eich } 1}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Gluon}}}$ Eigenzustände von Q^3_{ges} und $(Q_{\text{ges}})^2$ zu den Eigenwerten $M_{\text{ges}} = 0$, $L_{\text{ges}} = 0$ sind[12]. *Wählen* wir die $\Big| \underset{\text{Ferm}}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Quark}}}$ als Eigenzustände von $(Q_{\text{Quark}})^2$ zu den Eigenwerten $l_{\text{Quark}}(l_{\text{Quark}}+1)$ und die $\Big| \underset{\text{Eich } 1}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Gluon}}}$ als Eigenzustände von $(Q_{\text{Gluon}})^2$ zu den Eigenwerten $l_{\text{Gluon}}(l_{\text{Gluon}}+1)$, so haben wir

$$\Big| \underset{\text{Ferm}}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Quark}}} \Big| \underset{\text{Eich } 1}{\widehat{\mathbf{phys}}}^{\text{Pal}} \Big\rangle_{l_{\text{Gluon}}} = \left| l_{\text{Quark}} l_{\text{Gluon}} 00 \right\rangle \quad . \tag{4.40}$$

Wir wollen uns wie in der Axialen Eichung auf den 2-Quark-Sektor, d.h. auf baryonische Zustände beschränken[13]. Einzelne ins Vakuum gesetzte Quarks erfüllen die Relationen (4.27, 4.28). Die Kopplung zu zwei Quarks führt zu $\left| l_{\text{Quark}} m_{\text{Quark}} \right\rangle$-Zuständen

[11] Siehe z.B. [Edm64] S.15.

[12] Diese Schlußfolgerung ist natürlich nur für $g \neq 0$ gültig!

[13] Auch in der Palumbo-Eichung sind 1-Quark-Zustände mit $j_{\text{Quark}} = \frac{1}{2}$ keine physikalischen Zustände. Wie bei oben folgender Diskussion für 2-Quark-Zustände folgt mit $j_{\text{Quark}} = \frac{1}{2}$ aus $\left| \frac{1}{2} l_{\text{Gluon}} 00 \right\rangle$, daß $l_{\text{Gluon}} = \frac{1}{2}$ ist. l_{Gluon} ist aber Quantenzahl zu einem Drehimpulsoperator in der „Ortsdarstellung“ $Q^a_{\text{Gluon}} \simeq \frac{1}{i} \varepsilon^{abc} \theta^b \frac{\partial}{\partial \theta^c}$, so daß die Eigenzustände ebenfalls in der Ortsdarstellung gegeben sind: $\left\langle \vartheta, \varphi \middle| l_{\text{Gluon}} m_{\text{Gluon}} \right\rangle = Y_{l_{\text{Gluon}} m_{\text{Gluon}}}$. Die Ortsdarstellung von Drehimpulseigenzuständen existiert jedoch nur für ganzzahlige Quantenzahlen l_{Gluon}. Falls l_{Gluon} ganzzahlig ist, muß auch j_{Quark} ganzzahlig sein, q.e.d. .
(Hinter der Darstellung von Q_{Gluon} als „räumlichen“ Drehimpulsoperator stecken ganz wesentlich die kanonischen *Kommutations*relationen für die Eichfelder. Damit folgt aus den Kommutationsrelationen der ganzzahlige „Spin“ der gluonischen Zustände.)

$|00\rangle$, $|1-1\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, d.h. zur Quantenzahl $l_{\text{Quark}} = 0$ oder $l_{\text{Quark}} = 1$. Aus den Gesetzen der Drehimpulsalgebra[14] folgt aus l_{Quark} aber auch die Quantenzahl l_{Gluon},

$$\left.\begin{array}{lclcl} l_{\text{Quark}} = 0 & : & |0 l_{\text{Gluon}} 00\rangle & \Rightarrow & l_{\text{Gluon}} = 0 \\ l_{\text{Quark}} = 1 & : & |1 l_{\text{Gluon}} 00\rangle & \Rightarrow & l_{\text{Gluon}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{l}_{\text{Gluon}} = \boldsymbol{l}_{\text{Quark}} \quad . \tag{4.41}$$

Ein allgemeiner baryonischer Zustand in der Palumbo-Eichung ist somit nach (4.36) gegeben durch

$$\begin{aligned} |\mathbf{baryon}^{\text{Pal}}\rangle &= \sum_{l=0}^{1} \sum_{k} c_{lk} \, |l\, l\, 00\rangle \, |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich }2}^{\text{Pal}}\rangle_k \\ &= \sum_k \Big(|0000\rangle \,,\, |1100\rangle \Big) \cdot \begin{pmatrix} c_{0k} \\ c_{1k} \end{pmatrix} \; |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich }2}^{\text{Pal}}\rangle_k \quad . \end{aligned} \tag{4.42}$$

Somit hat ein allgemeines Matrixelement des Hamilton-Operators zwischen zwei baryonischen Zuständen in der Palumbo-Eichung folgende Form,

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{baryon}^{\text{Pal}} | H^{\text{Pal}} | \mathbf{baryon}^{\text{Pal}\prime} \rangle = \\ &\sum_{k,k'} {}_k\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich }2}^{\text{Pal}} | \Big(c_{0k}, c_{1k} \Big) \underbrace{\begin{pmatrix} \langle 0000| \\ \langle 1100| \end{pmatrix} \mathbf{H}^{\text{Pal}} \Big(|0000\rangle, |1100\rangle \Big)}_{\begin{pmatrix} \langle 0000|H^{\text{Pal}}|0000\rangle & \langle 0000|H^{\text{Pal}}|1100\rangle \\ \langle 1100|H^{\text{Pal}}|0000\rangle & \langle 1100|H^{\text{Pal}}|1100\rangle \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c'_{0k'} \\ c'_{1k'} \end{pmatrix} |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich }2}^{\text{Pal}}\rangle_{k'} . \end{aligned} \tag{4.43}$$

Man erkennt, daß man den Ausdruck für baryonische Matrixelemente in der Palumbo-Eichung (4.43) in den Ausdruck (4.32) für solche Matrixelemente in der Axialen Eichung überführen kann, wenn man $|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich }2}^{\text{Pal}}\rangle_k$ mit $|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}^{\text{Ax}}\rangle_k$ identifiziert und zeigen kann, daß $\left(H^{\text{Pal}}\right)_{ij} = \left(H^{\text{Ax}}\right)_{ij}$ ist. Um $\left(H^{\text{Pal}}\right)_{ij}$ zu berechnen, benötigen wir jedoch explizite Ausdrücke für die Basisfunktionen $|0000\rangle$ und $|1100\rangle$. Bisher hatten wir die Basisproduktzustände $|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Ferm}}^{\text{Pal}}\rangle_l |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich }1}^{\text{Pal}}\rangle_l$ lediglich nach Quantenzahlen von Operatoren der Theorie klassifiziert. Wir schreiben daher $|0000\rangle$ und $|1100\rangle$ zunächst in der Produktbasis von Q^3_{Quark}, $(Q_{\text{Quark}})^2$ und Q^3_{Gluon}, $(Q_{\text{Gluon}})^2$-Zuständen: $|l_{\text{Quark}} m_{\text{Quark}}\rangle |l_{\text{Gluon}} m_{\text{Gluon}}\rangle$. Die Umkopplungskoeffizienten (Clebsch-Gordan-Koeffizienten) finden sich beispielsweise in [Tun85],

$$|0000\rangle = \underset{\text{Quark}}{|00\rangle} \, \underset{\text{Gluon}}{|00\rangle} \quad , \tag{4.44}$$

$$|1100\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(\underset{\text{Quark}}{|11\rangle} \, \underset{\text{Gluon}}{|1\text{-}1\rangle} + \underset{\text{Quark}}{|1\text{-}1\rangle} \, \underset{\text{Gluon}}{|11\rangle} - \underset{\text{Quark}}{|10\rangle} \, \underset{\text{Gluon}}{|10\rangle} \Big) \quad . \tag{4.45}$$

[14] $M_{\text{ges}} = m_{\text{Ferm}} + m_{\text{Gluon}} \quad , \quad m^{\max}_{\text{Ferm}} = l_{\text{Ferm}} \quad , \quad m^{\max}_{\text{Gluon}} = l_{\text{Gluon}} \quad .$

Der fermionische Anteil dieser Produktzustände $\big|\mathrm{lm}\big\rangle_{\text{Quark}}$ läßt sich wie in der Axialen Eichung durch einzelne ins Vakuum gesetzte Quarks aufbauen (vgl. 4.27–4.30). Wir fassen wiederholend zusammen[15],

$$
\begin{aligned}
\big|0\,0\big\rangle_{\text{Quark}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} - \big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0}\right) \quad , \\
\big|1\,0\big\rangle_{\text{Quark}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} + \big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0}\right) \quad , \\
\big|1\text{-}1\big\rangle_{\text{Quark}} &= \big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} \quad , \qquad \text{wobei} \qquad \begin{aligned} \big|\tfrac{1}{2}\,{-}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} &= \phi_2^\dagger(x_0)\big|\mathbf{vac}\big\rangle_{\text{Ferm}} \quad , \\ \big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} &= \phi_1^\dagger(x_0)\big|\mathbf{vac}\big\rangle_{\text{Ferm}} \quad . \end{aligned} \\
\big|1\,1\big\rangle_{\text{Quark}} &= \big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{+}\tfrac{1}{2}\big\rangle_{x_0} \quad ,
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Die gluonischen Zustände sind Eigenzustände von $Q^a_{\text{Gluon}} \simeq \frac{1}{i}\theta^b\frac{\partial}{\partial\theta^c}$, also eines Drehimpulsoperators in der Ortsdarstellung. Daher sind die gluonischen Zustände $\big|\mathrm{lm}\big\rangle_{\text{Gluon}}$ durch Drehimpulseigenzustände in der Ortsdarstellung, d.h. durch die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} gegeben,

$$
\begin{aligned}
\big\langle\vartheta,\varphi\big|00\big\rangle_{\text{Gluon}} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , & \big\langle\vartheta,\varphi\big|10\big\rangle_{\text{Gluon}} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \quad , \\
\big\langle\vartheta,\varphi\big|11\big\rangle_{\text{Gluon}} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{i\varphi} \quad , & \big\langle\vartheta,\varphi\big|1\text{-}1\big\rangle_{\text{Gluon}} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{-i\varphi} \quad .
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Mit der expliziten Angabe physikalischer Zustände ist es nun möglich, $\left(H^{\text{Pal}}\right)_{ij}$ zu bestimmen. Der Masseterm H_m ist in (4.6) bereits durch Quarkerzeuger und -vernichter ausgedrückt. Er ist diagonal in $\big|0000\big\rangle$ und $\big|1100\big\rangle$ und liefert wie in der Axialen Eichung stets den Beitrag $2m$, da bei baryonischen Zuständen zwei Quarks vorliegen. Wie bereits im Anschluß an (3.32) erwähnt, ist der im kinetischen Term der Nullmoden $H^{\text{Palumbo}}_{\text{Nullmode}}$ auftretende Operator $\hat{L}^2$ identisch mit dem im Gauß-Gesetz vorkommenden Operator $(Q_{\text{Gluon}})^2$, nach dem u.a. die physikalischen Basiszustände klassifiziert wurden. Die Projektion von $H^{\text{Palumbo}}_{\text{Nullmode}}$ auf physikalische Basiszustände ist daher ohne explizite Angabe von $\big|0000\big\rangle$ und $\big|1100\big\rangle$ leicht durchzuführen. Lediglich die Projektion des Coulombpotential der Palumbo-Eichung $H^{\text{Pal}}_{\text{Coul}}$ aus (2.49) ist nichttrivial und erfordert die explizite Angabe sowohl der Basiszustände als auch der in $H^{\text{Pal}}_{\text{Coul}}$ auftretenden Operatoren ρ^a_m und der (in (2.18) definierten) unitären Operatoren $e^{ig\Delta}$. Wir skizzieren die wesentlichen Schritte dieser Projektion im Anhang A. Die Projektion des Hamilton-Operators auf physikalische Zustände stellt die volle Implementierung des Rest-Gauß-Gesetzes dar. Wie nicht anders zu erwarten, gehen daher die auf

[15]Um die Endergebnisse transparenter zu gestalten, haben wir hier gegenüber den Zuständen in der Axialen Eichung (4.29, 4.30) einen Austausch $x_0 \leftrightarrow y_0$ vorgenommen.

den jeweiligen physikalischen Sektor projizierten Hamilton-Operatoren der Axialen und der Palumbo-Eichung ineinander über,

$$\begin{pmatrix} \langle 0000|H^{\text{Pal}}|0000\rangle & \langle 0000|H^{\text{Pal}}|1100\rangle \\ \langle 1100|H^{\text{Pal}}|0000\rangle & \langle 1100|H^{\text{Pal}}|1100\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 00|H^{\text{Ax}}|00\rangle & \langle 00|H^{\text{Ax}}|10\rangle \\ \langle 10|H^{\text{Ax}}|00\rangle & \langle 10|H^{\text{Ax}}|10\rangle \end{pmatrix} \quad . \tag{4.48}$$

Da wir hierdurch den Ausdruck für baryonische Matrixelemente in der Palumbo-Eichung (Gl.4.43) exakt in den entsprechenden Ausdruck für solche Matrixelemente in der Axialen Eichung (Gl.4.32) überführt haben, stellt die dargestellte Projektion auf physikalische Zustände eine alternative Methode zur Eichfixierung mittels unitärer Transformationen dar. Axiale und Palumbo-Eichung unterscheiden sich nach Projektion auf den physikalischen Sektor nicht mehr. Wir werden uns daher von jetzt an nur noch mit dem Ausdruck (4.32) für baryonische Matrixelemente in der Axialen Eichung beschäftigen.

4.3 Störungstheoretische Bestimmung der Eigenwerte des Hamilton-Operators im statischen Limes

Wir wollen die Eigenwerte des auf den 2-Quark-Sektor projizierten Hamilton-Operators bestimmen. Zunächst geben wir eine Standardüberlegung an, wie die dazu notwendige Diagonalisierung des Hamilton-Operators (numerisch) durchgeführt werden kann. Dies ermöglicht uns eine bessere Einordnung des später vorgestellten störungstheoretischen Vorgehens.
Wir betrachten das Matrixelement des Hamilton-Operators zwischen baryonischen Zuständen aus (4.32),

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{baryon}|H|\mathbf{baryon}'\rangle \;= \\ &\quad = \sum_{k,k'} {}_k\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}| \left(c_{0k}, c_{1k}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \langle 00|H^{\text{Ax}}|00\rangle & \langle 00|H^{\text{Ax}}|10\rangle \\ \langle 10|H^{\text{Ax}}|00\rangle & \langle 10|H^{\text{Ax}}|10\rangle \end{pmatrix}}_{=:\,{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}} \begin{pmatrix} c'_{0k'} \\ c'_{1k'} \end{pmatrix} |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}\rangle_{k'} \\ &\quad \equiv \left((c_{01})_1, \dots, (c_{01})_k, \dots\right) \begin{pmatrix} {}_1\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}|\, {}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\, |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}\rangle_1 & \cdots & {}_1\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}|\, {}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\, |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}\rangle_{k'} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ {}_k\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}|\, {}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\, |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}\rangle_1 & \cdots & {}_k\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}|\, {}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\, |\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}\rangle_{k'} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c'^0_1)_1 \\ \vdots \\ (c'^0_1)_k \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.49}$$

mit $(c_{01})_k \equiv \left(c_{0k}, c_{1k}\right)$.
Es stellt sich die Aufgabe, einen Basissatz von Eichfeldwellenfunktionen anzugeben, von dem wir bei der Diagonalisierung des auf den 2-Quark-Sektor projizierten Hamilton-Operators ausgehen wollen. Dazu stellt man folgende Überlegung an. Da der Hamilton-Operator periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ mit Periode 2 ist (vgl. 3.33), sind die Matrixelemente $\langle \mathbf{baryon}|H|\mathbf{baryon}'\rangle$

periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ [16]. Durch explizites Einsetzen der G_{ij}^{Ax} aus (2.52, 2.54) in ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ aus (4.34) überzeugt man sich leicht davon, daß ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ jedoch nicht periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ ist. Daher können in $\hat{a}^{c_0}$ periodische Eichfeldwellenfunktionen keinen vollständigen Satz von Basisfunktionen bilden, mit dem sich die periodischen Matrixelemente darstellen lassen. Andererseits ist es wünschenswert einen Basissatz von periodischen Eichfeldwellenfunktionen zu besitzen, da sich dadurch der Basissatz von einer überabzählbaren Menge von Basisfunktionen auf eine abzählbare Menge reduziert. Für eine numerische Diagonalisierung, bei der man sich nur einen endlichen Satz von Basisfunktionen auswählen kann, verspricht ein Basissatz periodischer Eichfeldwellenfunktionen daher mehr Erfolg bei der Bestimmung der Eigenwerte des Hamilton-Operators. In [Sch93] wurde zu diesem Zweck ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ mit einer unitären Transformation U derart transformiert, so daß $U\left[{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right]U^\dagger$ periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ mit Periode 2 wird[17]. Mit neuen Entwicklungskoeffizienten lassen sich die Basiswellenfunktionen $\left\langle \hat{a}^{c_0} \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_k$ dann periodisch in $\hat{a}^{c_0}$ mit Periode 2 wählen. Weiterhin müssen die Basisfunktionen die aus der Jacobideterminante folgende Randbedingung, für alle ganzzahligen Werte von $\hat{a}^{c_0}$ zu verschwinden, erfüllen. Als einfachster Basissatz bietet sich daher der Satz von auf das Intervall $[0,1]$ orthonormierten Basisfunktionen

$$\left\langle \hat{a}^{c_0} \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_k = \sqrt{2}\sin\left(k\pi\hat{a}^{c_0}\right) \qquad , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.50}$$

an. Man steht dann vor der Aufgabe, folgende Matrix zu diagonalisieren,

$$\begin{pmatrix} {}_1\left\langle \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \middle| U\left[{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right]U^\dagger \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_1 & \cdots & {}_1\left\langle \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \middle| U\left[{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right]U^\dagger \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_{k'} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ {}_k\left\langle \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \middle| U\left[{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right]U^\dagger \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_1 & \cdots & {}_k\left\langle \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \middle| U\left[{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right]U^\dagger \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_{k'} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

mit U aus der Fußnote von Seite 27 und $\left\langle \hat{a}^{c_0} \middle| \underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}} \right\rangle_k$ aus (4.50). Bei einer numerischen Diagonalisierung wählt man sich dazu eine endliche Anzahl von Basisfunktionen aus (vgl. [Sch93]).

Wir wollen nun das sich anfänglich stellende Problem der Nichtperiodizität von ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ auf andere Weise umgehen. Da besagte Nichtperiodizität nur in Termen auftritt, die proportional zu $L^j, j \leq 0$ sind (L = Umfang des Kreises, auf dem die Theorie formuliert wurde), nicht aber in Termen, die proportional zu L^1 sind, wovon man sich leicht durch explizites Einsetzen der G_{ij}^{Ax} aus (2.52, 2.54) in ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ aus (4.34) überzeugt, bietet es sich an, die nichtperiodischen Terme in ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ einfach zu vernachlässigen. Auf diese Weise bilden in $\hat{a}^{c_0}$ periodische Basisfunktionen einen vollständigen Satz für die periodischen Matrixelemente. Terme, die proportional zu L^0 sind, sollen in einem zweiten Schritt in Störungsrechung behandelt werden.

Man beachte an dieser Stelle, daß eine Umdefinition von $\hat{a}^{c_0}$ (beispielsweise: $\hat{a}^{c_0} = \frac{1}{L}\check{a}^{c_0'}$) die

[16]Die Periodizität resultierte aus einer Resteichsymmetrie nach der Eichfixierung ($\rightarrow$ Displacement-Symmetrie).

[17]Mit anderen Worten: $U\left[{}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right]U^\dagger$ wird eichinvariant gewählt.

oberflächliche L-Proportionalität auf der hier diskutierten Operatorebene durchaus ändern kann. Um päzise zu sein, *definieren* wir daher den periodischen Anteil von ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ als den zu L proportionalen Anteil. Mit dieser Definition können wir im weiteren die L-Proportionalitäten einzelner Terme auf naive Weise (wie oben getan) zuordnen.
Da der zu L^1 proportionale Anteil von ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ die einfache diagonale Gestalt (vgl. 4.34, 2.52, 2.54)

$$\left({}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right)_{(L^1)} = \begin{pmatrix} -\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{\left(\partial\hat{a}^{c_0}\right)^2} - \frac{g^2L}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{\left(\partial\hat{a}^{c_0}\right)^2} - \frac{g^2L}{8} + \frac{g^2L}{4\sin^2(\pi\hat{a}^{c_0})} \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

annimmt, bietet es sich an, als Basissatz von Eichfeldwellenfunktionen die Eigenfunktionen von $\langle 00|H|00\rangle_{(L^1)}$ bzw. $\langle 10|H|10\rangle_{(L^1)}$ zu wählen, die analytisch bestimmt werden können (siehe unten). Wir geben zur besseren Unterscheidung zum bisherigen Standardverfahren baryonische Matrixelemente des zu L^1 proportionalen Hamilton-Operators in dem neu gewählten Basissatz von Eichfeldwellenfunktionen an. Mit den orthonormierten Eigenfunktionen $\langle\hat{a}^{c_0}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{0k}$ von $\langle 00|H|00\rangle_{(L^1)}$ und $\langle\hat{a}^{c_0}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{1k}$ von $\langle 10|H|10\rangle_{(L^1)}$, können wir einen allgemeinen baryonischen Zustand auch schreiben als,

$$\begin{aligned} |\mathbf{baryon}\rangle &= \sum_{l=0}^{1}\sum_k c_{lk}|l0\rangle|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{lk} \\ &\equiv \sum_k \Big(|00\rangle, |10\rangle\Big)\begin{pmatrix} |\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{0k} & 0 \\ 0 & |\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{1k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{0k} \\ c_{1k}\end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{4.53}$$

In dieser Basis nimmt der auf den 2-Quark-Sektor projizierte und zu L^1 proportionale Hamilton-Operator bereits diagonale Gestalt an,

$$\begin{pmatrix} {}_{01}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 00|H|00\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{01} & {}_{01}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 00|H|10\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{11} & \cdots & \cdots \\ {}_{11}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 10|H|00\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{01} & {}_{11}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 10|H|10\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{11} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \cdots & {}_{0k}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 00|H|00\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{0k'} & {}_{0k}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 00|H|10\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{1k'} & \cdots \\ & {}_{1k}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 10|H|00\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{0k'} & {}_{1k}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 10|H|10\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{1k'} & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}_{01}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 00|H|00\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{01} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & {}_{11}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 10|H|10\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{11} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & {}_{02}\langle\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}|\langle 00|H|00\rangle_{(L^1)}|\underset{\text{Eich}}{\widehat{\mathbf{phys}}}\rangle_{02} & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} . \tag{4.54}$$

Wir haben noch die Eigenwerte von $\big\langle 00\big|H\big|00\big\rangle_{(L^1)}$ und $\big\langle 10\big|H\big|10\big\rangle_{(L^1)}$ zu bestimmen. Das Eigenwertproblem für $\big\langle 00\big|H\big|00\big\rangle_{(L^1)}$,

$$\big\langle \hat{a}^{c_0}\big|\Big(-\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{\big(\partial\hat{a}^{c_0}\big)^2}-\frac{g^2L}{8}\Big)\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{0k}=E_{0k}\big\langle\hat{a}^{c_0}\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{0k} \quad , \tag{4.55}$$

mit der aus der Jacobideterminanten folgenden Randbedingung $\big(\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}(\hat{a}^{c_0}=n\in Z)\big)_{0k}=0$ wird gelöst durch

$$\begin{aligned}\big\langle \hat{a}^{c_0}\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{0k} &= \sqrt{2}\sin\big(k\pi\hat{a}^{c_0}\big) \quad , &(4.56)\\ E_{0k} &= \frac{g^2L}{8}k^2-\frac{g^2L}{8} \qquad , \quad k=1,2,3,\dots \quad . &(4.57)\end{aligned}$$

Das Eigenwertproblem für $\big\langle 10\big|H\big|10\big\rangle_{(L^1)}$,

$$\big\langle \hat{a}^{c_0}\big|\Big(-\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{\big(\partial\hat{a}^{c_0}\big)^2}-\frac{g^2L}{8}+\frac{g^2L}{4\sin^2\big(\pi\hat{a}^{c_0}\big)}\Big)\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{1k}=E_{1k}\big\langle\hat{a}^{c_0}\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{1k} \quad , \tag{4.58}$$

mit der Randbedingung $\big(\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}(\hat{a}^{c_0}=n\in Z)\big)_{1k}=0$ wird gelöst durch (vgl. [Sch93] und/oder [Kam83])

$$\begin{aligned}\big\langle \hat{a}^{c_0}\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{1k} &= \sqrt{\tfrac{2}{(k+1)^2-1}}\left(\frac{\cos\big(\pi\hat{a}^{c_0}\big)}{\sin\big(\pi\hat{a}^{c_0}\big)}\sin\big(\pi\hat{a}^{c_0}(k+1)\big)-(k+1)\cos\big(\pi\hat{a}^{c_0}(k+1)\big)\right), &(4.59)\\ E_{1k} &= \frac{g^2L}{8}(k+1)^2-\frac{g^2L}{8} \qquad , \quad k=1,2,3,\dots \quad . &(4.60)\end{aligned}$$

Wir wollen nun eine Störungsrechnung in L durchführen, wobei die Störung V durch die Terme des Hamilton-Operators, die proportional zu (L^0) sind, gegeben ist, d.h. genauer[18],

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\big\langle 00\big|V\big|00\big\rangle & \big\langle 00\big|V\big|10\big\rangle\\ \big\langle 10\big|V\big|00\big\rangle & \big\langle 10\big|V\big|10\big\rangle\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\big\langle 00\big|H\big|00\big\rangle & \big\langle 00\big|H\big|10\big\rangle\\ \big\langle 10\big|H\big|00\big\rangle & \big\langle 10\big|H\big|10\big\rangle\end{pmatrix}_{(L^0)}\\ &\overset{(4.34)}{=} \begin{pmatrix}\frac{3}{8}g^2|d|+2m & -i\frac{g^2d}{4}\Big(\cot(\pi\hat{a}^{c_0})-\frac{\pi\hat{a}^{c_0}}{\sin^2(\pi\hat{a}^{c_0})}\Big)\\ i\frac{g^2d}{4}\Big(\cot(\pi\hat{a}^{c_0})-\frac{\pi\hat{a}^{c_0}}{\sin^2(\pi\hat{a}^{c_0})}\Big) & -\frac{1}{8}g^2|d|+2m\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.61}$$

Wir vernachlässigen Terme des Hamilton-Operators, die proportional zu $L^j,\ j\leq -1$ sind. Die Energiekorrektur zu ${}_{01}\big\langle\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big|\big\langle 00\big|H\big|00\big\rangle_{(L^1)}\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{01}=E_{01}=0$ ist damit in 1.Ordnung Störungsrechnung gegeben durch,

$$\begin{aligned}\Delta E_{01} &= {}_{01}\big\langle\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big|\big\langle 00\big|V\big|00\big\rangle\big|\widehat{\underset{\text{Eich}}{\mathbf{phys}}}\big\rangle_{01}\\ &= \frac{3}{8}g^2|d|+2m \quad ,\end{aligned} \tag{4.62}$$

[18] Der Beitrag $2m$ des Masseterms wurde in den Störterm mit aufgenommen, da er formal proportional zu L^0 ist. Er kann selbstverständlich auch zum „ungestörten“ Problem gezählt werden.

so daß der korrigierte Energie-Eigenwert gegeben ist durch,

$$\tilde{E}_1 := E_{01} + \Delta E_{01} = \frac{3}{8} g^2 |d| + 2m \quad . \tag{4.63}$$

Aufgrund der Entartung

$$E_{1k} = E_{0(k+1)} \tag{4.64}$$

müssen wir zur Bestimmung der Energiekorrekturen zu $E_{11} = {}_{11}\Big\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big| \Big\langle 10 \Big| H \Big| 10 \Big\rangle_{(L^1)} \Big| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big\rangle_{11}$ und $E_{02} = {}_{02}\Big\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big| \Big\langle 00 \Big| H \Big| 00 \Big\rangle_{(L^1)} \Big| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big\rangle_{02}$ entartete Störungstheorie anwenden, d.h. wir müssen die Störung im Raum der entarteten Zustände und damit die Matrix

$$\begin{pmatrix} {}_{11}\Big\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big| \Big\langle 10 \Big| V \Big| 10 \Big\rangle \Big| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big\rangle_{11} & {}_{11}\Big\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big| \Big\langle 10 \Big| V \Big| 00 \Big\rangle \Big| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big\rangle_{02} \\ {}_{02}\Big\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big| \Big\langle 00 \Big| V \Big| 10 \Big\rangle \Big| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big\rangle_{01} & {}_{02}\Big\langle \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big| \Big\langle 00 \Big| V \Big| 00 \Big\rangle \Big| \widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}} \Big\rangle_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} g^2 |d| + 2m & i\frac{\sqrt{3}}{4} g^2 d \\ -i\frac{\sqrt{3}}{4} g^2 d & \frac{3}{8} g^2 |d| + 2m \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

diagonalisieren. Die Eigenwerte berechnen sich zu

$$\Delta E_1 = -\frac{3}{8} g^2 |d| + 2m \quad , \quad \Delta E_2 = \frac{5}{8} g^2 |d| + 2m \quad , \tag{4.66}$$

so daß die in 1.Ordnung Störungsrechnung korrigierten Energie-Eigenwerte gegeben sind durch,

$$\tilde{E}_2 \;:=\; E_{11} + \Delta E_1 = \frac{3}{8} g^2 L - \frac{3}{8} g^2 |d| + 2m \quad , \tag{4.67}$$

$$\tilde{E}_3 \;:=\; E_{11} + \Delta E_2 = \frac{3}{8} g^2 L + \frac{5}{8} g^2 |d| + 2m \quad . \tag{4.68}$$

Die Bestimmung der Korrekturen zu $E_{12} = E_{03}$ verläuft vollkommen analog und führt zu den korrigierten Energie-Eigenwerten $\tilde{E}_4,\ \tilde{E}_5$ (und so weiter, ad infinitum).

Das beachtenswerte Resultat ist, daß die Störungsrechnung 1.Ordnung in L bereits die in [Sch93] auf analytischem Wege gewonnenen exakten Ergebnisse für die Energie-Eigenwerte liefert. Dies ist jedoch nicht weiter verwunderlich, da die exakten Energie-Eigenwerte keinen Anteil besitzen, der proportional zu $L^j,\ j \leq -1$ ist. In der Störungsrechnung werden zu $L^j,\ j \leq -1$ proportionale Terme erst in 2. und höherer Ordnung produziert (der Energienenner in 2.Ordnung Störungstheorie ist stets proportional zu L !). Andererseits hatten wir die zu $L^j,\ j \leq -1$ proportionalen Terme von ${}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}$ von vornherein vernachlässigt. Da damit alle Korrekturen zu unseren Nährerungen proportional zu $L^j,\ j \leq -1$ sind, muß die Störungsrechnung 1.Ordnung mit $\left({}^{00|00}_{10|00}H^{00|10}_{10|10}\right)_{(L^1)}$ als Störung bereits die exakten Resultate liefern. Dies wirft die Frage auf, warum bei den exakten Ergebnissen für die Energie-Eigenwerte keine Beiträge auftreten, die proportional zu $L^j,\ j \leq -1$ sind. Eine einfache Antwort auf diese Frage würde somit eine a priori Rechtfertigung für die vorgestellte Störungsrechnung liefern. Leider konnten wir bis jetzt keine einfache Antwort auf diese Frage finden.

Wir wollen die physikalisch wichtigen Folgerungen aus dem ermittelten Eigenwertspektrum

kurz referieren (für eine ausführliche Diskussion siehe [Sch93]). Die Betrachtung der korrigierten (= exakten) Energie-Eigenwerte zeigt, daß lediglich *ein* Energie-Eigenwert *nicht* proportional zu L^1 ist und damit im Kontinuumslimes $L \to \infty$ nicht divergiert. Da die Energie-Korrekturen nur proportional zu L^0 sind, wird diese L-Proportionalität bereits vom „ungestörten" Hamilton-Operator $\left({}^{00|00}_{10|00} H^{00|10}_{10|10}\right)_{(L^1)}$ getragen. Wir betrachten daher nur die Eigenzustände des „ungestörten" Hamilton-Operators, die bereits das L-Verhalten hervorrufen.
Der Eigenzustand des ungestörten Hamilton-Operators, der zum einzigen Eigenwert gehört, der nicht proportional zu L^1 ist, ist der zum fermionischen Farb-Singulett abgekoppelte Zustand $\big|00\big\rangle\big|\widehat{\mathbf{phys}}_{\text{Eich}}\big\rangle_{01}$. Alle anderen Eigenzustände, insbesondere alle Zustände, die im fermionischen Sektor zum Farb-Triplett $\big|10\big\rangle$ abgekoppelt wurden, besitzen zu L^1 proportionale Energie-Eigenwerte, so daß es nicht möglich ist, diese Zustände im Kontinuumslimes $L \to \infty$ anzuregen[19]. Das ermittelte Energiespektrum des zu L proportionalen Hamilton-Operators liefert somit eine Rechtfertigung des Farbdogmas des nichtrelativistischen Quark-Models, in dem die Quarkfreiheitsgrade stets zum Farb-Singulett abgekoppelt werden. Dadurch wird die Existenz von Zuständen ausgeschlossen, die gruppentheoretisch erwartet, im Spektrum jedoch nicht beobachtet werden.
Um den Grund für das unterschiedliche Energieverhalten der energetisch niedrigst liegenden Farb-Singulett und Farb-Triplett-Zustände noch einmal in aller Kürze deutlich zu machen, geben wir den Anteil des Hamilton-Operators an, der (noch vor der Projektion auf physikalische Zustände) (naiv) proportional zu L^1 ist (vgl. 4.10, 3.20, 2.48, 2.52),

$$H_{(L^1)} = \underbrace{-\frac{g^2 L}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{\left(\partial \hat{a}^{c_0}\right)^2} - \frac{g^2 L}{8}}_{\text{von } H^{\text{Ax}}_{\text{Nullmode}}} + \underbrace{\frac{g^2 L}{8}\frac{(Q_{\text{Quark}})^2}{\sin^2(\pi \hat{a}^{c_0})}}_{\text{von } H^{\text{Ax}}_{\text{Coul}}} \quad . \tag{4.69}$$

Man erkennt, daß lediglich Zustände mit fermionischer Farbladung an den zu L proportionalen Anteil des Coulombpotentials ankoppeln. Dieses zusätzliche Potential für Zustände fermionischer Ladung läßt bereits die Energie des energetisch niedrigst liegenden Triplettzustandes mit der Länge L des Intervalls divergieren.

[19]Da ein Potential nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, kann das gesamte Spektrum natürlich um eine Konstante (evt.$\propto L$) verschoben werden. Wichtig ist an dieser Stelle nur, daß der Zustand niedrigster Energie von den übrigen Zuständen um einen mit der Länge L des Intervalls divergierenden Betrag abweicht.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wurde die 1+1 dimensionale Quantenchromodynamik auf dem Kreis in Axialer und Palumbo-Eichung vergleichend dargestellt.
Nachdem wir den Vergleich zwischen diesen beiden Eichungen auf den statischen Limes der QCD_{1+1} mit einer SU(2) Farbgruppe und für baryonische Zustände spezialisiert hatten, demonstrierten wir innerhalb dieser Approximation, wie auf systematische Weise die durch das Rest-Gauß-Gesetz bestimmten, physikalischen Basiszustände konstruiert werden können. Wichtig für die explizite Konstruktion physikalischer Zustände war insbesondere die triviale Vakuumstruktur im statischen Limes. Durch Projektion der Hamilton-Operatoren der Axialen und der Palumbo-Eichung auf die konstruierten physikalischen Basiszustände gelang es uns, den Hamilton-Operator der Palumbo-Eichung in den Hamilton-Operator der Axialen Eichung überzuführen. Da sich in 1+1 Dimensionen die Palumbo-Eichung von der Axialen Eichung im wesentlichen dahingehend unterscheidet, daß in dieser Eichung eine abschließende unitäre Eichfixierungstransformation nicht durchgeführt wurde, zeigt die explizite Projektion auf physikalische Zustände, daß eine solche Projektion eine alternative Methode zur Fixierung der Eichung mittels unitärer Transformationen darstellt. Es ist nicht auszuschließen, daß die durch das Gauß-Gesetz bestimmten physikalischen Zustände bereits vor jeglicher unitärer Eichfixierungstransformation in expliziter Weise innerhalb der Approximation des statischen Limes konstruiert werden können. Mit einer Projektion des Hamilton-Operators auf derartig konstruierte Zustände würde man bei der Eichfixierung gänzlich auf unitäre Eichfixierungstransformationen verzichten. Allerdings dürfte sich eine derartige Projektion als sehr aufwendig erweisen (der Aufwand der Projektion in der Palumbo-Eichung ist bereits um ein Vielfaches größer als in der Axialen Eichung!).
Abschließend zeigten wir, wie das exakte Spektrum des Hamilton-Operators für baryonische Zustände bereits in entarteter Störungsrechnung 1.Ordnung in L erhalten werden kann, wobei L der Umfang des Kreises ist, auf dem die Theorie formuliert wird. Als ungestörter Hamilton-Operator wurde dabei der Anteil des auf den 2-Quark-Sektor projizierten Hamilton-Operators definiert, der sich als eichinvariant unter der Displacement- und Permutations-Symmetrie entpuppte. Dieser Term definierte uns gleichzeitig eine Skala, auf der wir die Anteile des auf den 2-Quark-Sektor projizierten Hamilton-Operators nach Ordnungen des Umfangs L des Kreises sortieren konnten. Der Grund für die exakten Ergebnisse der Störungsrechnung 1.Ordnung lag im wesentlichen am exakten Spektrum selbst.

Da alle Korrekturen zu den gemachten Näherungen der Störungsrechnung 1.Ordnung nur zu Beiträgen führen konnten, die proportional zu $1/L$ sind, solche Beiträge im exakten Spektrum jedoch nicht auftreten, mußte die Störungsrechnung 1.Ordnung zwangsläufig die exakten Resultate liefern. Eine einfache Begründung für das Nichtauftreten von $1/L$-Termen im Spektrum würde eine a priori Rechtfertigung für die Störungsrechnung 1.Ordnung in L liefern.

Abschließend wiesen wir darauf hin, daß das ermittelte Energiespektrum eine partielle Rechtfertigung für das Farbdogma des nichtrelativistischen Quark-Models liefert, da im Kontinuumslimes lediglich der im fermionischen Sektor zum Farb-Singulett abgekoppelte Zustand niedrigster Energie eine nicht mit dem Umfang L des Kreises divergierende Anregungsenergie besitzt. Farb-Triplett-Zustände dagegen werden im Kontinuumslimes aufgrund ihrer divergierenden Anregungsenergie stets „eingefroren“. Für die Form des Spektrums waren im wesentlichen die gluonischen Nullmoden verantwortlich, die in einer Kontinuumsformulierung der Theorie nicht auftreten. Die Rechtfertigung des Farbdogmas innerhalb des betrachteten Modells ist somit letztendlich auf die sorgfältige Behandlung der Theorie auf dem endlichen Intervall zurückzuführen. Diese Erkenntnis geht jedoch bereits auf [Sch93] zurück.

Anhang A

Projektion des Hamilton-Operators in der Palumbo-Eichung auf physikalische 2-Quark-Zustände

Wir wollen insbesondere zeigen, wie sich die nichttriviale Projektion des Coulombpotentials der Palumbo-Eichung auf baryonische Zustände durchführen läßt. Dazu spezialisieren wir als erstes den Ausdruck (2.49) für das Coulombpotential der Palumbo-Eichung auf die SU(2) ($\Rightarrow p, q = 1, 2$) und verwenden die in (2.53, 2.54) eingeführte Abkürzung für die im Coulombpotential auftretende Summe,

$$H_{\mathrm{Coul}}^{\mathrm{Palumbo}} = \frac{g^2 L}{4} \sum_{\substack{p,q \\ a,b}} \left(e^{-ig\Delta} \frac{\lambda^a}{2} e^{ig\Delta} \right)_{qp} \left(e^{-ig\Delta} \frac{\lambda^b}{2} e^{ig\Delta} \right)_{pq} \int_0^L dx dy \, \rho_m^a(x) \rho_m^b(y) \quad G_{qp}^{\mathrm{Pal}}(x-y) \quad . \tag{A.1}$$

Wir benötigen zunächst einen expliziten Ausdruck für die unitäre Matrix $e^{ig\Delta}$, die in (2.18) als die θ/L diagonalisierende Transformationsmatrix definiert wurde,

$$e^{-ig\Delta} \frac{\theta}{L} e^{ig\Delta} = a \quad . \tag{2.18}$$

Die Spalten der (inversen) Transformationsmatrix $e^{+ig\Delta}$ sind die Eigenvektoren der Matrix θ/L. Explizite Diagonalisierung und Bestimmung der Eigenvektoren führt nach Normierung zur unitären Matrix $e^{ig\Delta}$,

$$e^{ig\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{i\theta^2 - \theta^1}{\sqrt{2r(r-\theta^3)}} & \frac{i\theta^2 - \theta^1}{\sqrt{2r(r+\theta^3)}} \\ -\sqrt{\frac{r-\theta^3}{2r}} & \sqrt{\frac{r+\theta^3}{2r}} \end{pmatrix} \quad , \; r = \theta^a \theta^a \quad . \tag{A.2}$$

Damit sind wir in der Lage, die in $H_{\mathrm{Coul}}^{\mathrm{Pal}}$ auftretenden Ausdrücke $\left(e^{-ig\Delta} \frac{\lambda^a}{2} e^{ig\Delta}\right)_{pq}$, ($a = 1, 2, 3$) zu bestimmen. Letztendlich relevant für $H_{\mathrm{Coul}}^{\mathrm{Pal}}$ sind nur die aufsummierten Ausdrücke

$\left(e^{-ig\Delta}\rho_m^a \frac{\lambda^a}{2} e^{ig\Delta}\right)_{qp}$. Hierfür ergibt sich, wenn man von den kartesischen Koordinaten θ^1, θ^2, θ^3 zu sphärischen Polarkoordinaten r, ϑ, φ übergeht,

$$\left(e^{-ig\Delta}\rho_m e^{ig\Delta}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho_m^1 \sin\vartheta\cos\varphi + \rho_m^2 \sin\vartheta\sin\varphi + \rho_m^3\cos\vartheta & -\rho_m^1\left(\cos\vartheta\cos\varphi + i\sin\varphi\right) - \rho_m^2\left(\cos\vartheta\sin\varphi - i\cos\varphi\right) + \rho_m^3\sin\vartheta \\ -\rho_m^1\left(\cos\vartheta\cos\varphi - i\sin\varphi\right) - \rho_m^2\left(\cos\vartheta\sin\varphi + i\cos\varphi\right) + \rho_m^3\sin\vartheta & -\left(\rho_m^1\sin\vartheta\cos\varphi + \rho_m^2\sin\vartheta\sin\varphi + \rho_m^3\cos\vartheta\right) \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Bei diesem Ausdruck beachte man, daß

$$\left(e^{-ig\Delta}\rho_m e^{ig\Delta}\right)_{qp} = \left(e^{-ig\Delta}\rho_m e^{ig\Delta}\right)^\dagger_{pq} \quad , \tag{A.4}$$

$$\left(e^{-ig\Delta}\rho_m e^{ig\Delta}\right)_{11} = \left(e^{-ig\Delta}\rho_m e^{ig\Delta}\right)_{22} \quad . \tag{A.5}$$

Unter Ausnutzung von (A.5) und $G^{\mathrm{Pal}}_{qp}(x-y) = G^{\mathrm{Pal}}_{pq}(y-x)$ (Gl. 2.55) schreibt sich das Coulombpotential (A.1) in der Form,

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}} = \frac{g^2L}{4}\int dxdy \quad & 2G^{\mathrm{Pal}}_{11}(x-y)\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{11}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{11} \\ & + G^{\mathrm{Pal}}_{12}(x-y)\left[\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{12}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{21} + \left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{21}\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{12}\right]. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Man entnimmt der expliziten Form der $(e^{-ig\Delta}\rho_m e^{ig\Delta})_{pq}$ aus (A.3), daß sich die in $H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}}$ auftretenden Ausdrücke $\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{qp}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{pq}$ stets in der Form

$$\sum_{ab} A^{a*}A^b\rho_m^a(x)\rho_m^b(y) \qquad \text{mit} \quad A^a \in \mathcal{C} \tag{A.7}$$

schreiben lassen. Im Anhang B wird die Wirkung solcher Operatoren auf die Basiszustände $|0000\rangle$, $|1100\rangle$ bestimmt.

Für den Operator $\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{11}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{11}$ identifizieren wir nach (A.3) A^a mit

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad , \tag{A.8}$$

so daß insbesondere alle A^a reell sind. Für reelle A^a vereinfachen sich die Formeln (B.8, B.9) im Anhang B unter Ausnutzung von (B.7) beträchtlich. Wir erhalten mit den Abkürzungen (B.6) aus Anhang B,

$$\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{11}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{11}|0000\rangle = \frac{1}{16}\left(\delta^+_{x=y} - \delta^+_{x\neq y}\right)|0000\rangle \quad , \tag{A.9}$$

$$|1100\rangle = \frac{1}{16}\left(\delta^+_{x=y} - \delta^+_{x\neq y}\right)|1100\rangle \quad . \tag{A.10}$$

Für $\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{12}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{21}$ ist nach (A.3) A^a gegeben durch

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\left(\cos\vartheta\cos\varphi - i\sin\varphi\right) \\ -\left(\cos\vartheta\sin\varphi + i\cos\varphi\right) \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad , \tag{A.11}$$

womit aus (B.8, B.9) folgt,

$$\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{12}\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{21}\left|0000\right\rangle = \tfrac{1}{8}\left(\delta^{+}_{x=y}-\delta^{+}_{x\neq y}\right)\left|0000\right\rangle+\tfrac{1}{8}\left(\delta^{-}_{x=y}-\delta^{-}_{x\neq y}\right)\left|1100\right\rangle, \tag{A.12}$$

$$\left|1100\right\rangle = \tfrac{1}{8}\left(\delta^{-}_{x=y}+\delta^{-}_{x\neq y}\right)\left|0000\right\rangle+\tfrac{1}{8}\left(\delta^{+}_{x=y}+\delta^{+}_{x\neq y}\right)\left|1100\right\rangle. \tag{A.13}$$

Die Wirkung von $\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{21}\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{12}$ auf $\left|0000\right\rangle$, $\left|1100\right\rangle$ erhält man nun leicht durch Symmetriebetrachtungen[1],

$$\left(e^{-ig\Delta}\rho(y)e^{ig\Delta}\right)_{21}\left(e^{-ig\Delta}\rho(x)e^{ig\Delta}\right)_{12}\left|0000\right\rangle = \tfrac{1}{8}\left(\delta^{+}_{x=y}-\delta^{+}_{x\neq y}\right)\left|0000\right\rangle-\tfrac{1}{8}\left(\delta^{-}_{x=y}+\delta^{-}_{x\neq y}\right)\left|1100\right\rangle, \tag{A.14}$$

$$\left|1100\right\rangle = -\tfrac{1}{8}\left(\delta^{-}_{x=y}-\delta^{-}_{x\neq y}\right)\left|0000\right\rangle+\tfrac{1}{8}\left(\delta^{+}_{x=y}+\delta^{+}_{x\neq y}\right)\left|1100\right\rangle. \tag{A.15}$$

Unter Ausnutzung von $G_{11}(0) = 0$ (Gl. 2.56) und $G^{\mathrm{Pal}}_{12} = G^{\mathrm{Ax}}_{12} - \frac{1}{\pi^2(\hat{a}^{c_0})^2}$ (Gl.2.53) lassen sich nun mit Hilfe von (A.6, A.9, A.10, A.12 –A.15) leicht die Matrixelemente von $H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}}$ angeben,

$$\begin{pmatrix} \left\langle 0000\middle|H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}}\middle|0000\right\rangle & \left\langle 0000\middle|H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}}\middle|1100\right\rangle \\ \left\langle 1100\middle|H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}}\middle|0000\right\rangle & \left\langle 1100\middle|H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Coul}}\middle|1100\right\rangle \end{pmatrix} = -\frac{g^2L}{4}\frac{1}{\pi^2(\hat{a}^{c_0})^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\ \frac{g^2L}{16}\begin{pmatrix} -G^{\mathrm{Ax}}_{11}(d)-\left(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d)+G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\right)+2G^{\mathrm{Ax}}_{12}(0) & -\left(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d)-G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\right) \\ +\left(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d)-G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\right) & -G^{\mathrm{Ax}}_{11}(d)+\left(G^{\mathrm{Ax}}_{12}(d)+G^{\mathrm{Ax}}_{12}(-d)\right)+2G^{\mathrm{Ax}}_{12}(0) \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

Der Term $-\frac{g^2L}{4}\frac{1}{\pi^2(\hat{a}^{c_0})^2}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ in diesem Ausdruck hebt sich gegen den im kinetischen Nullmodenterm $H^{\mathrm{Pal}}_{\mathrm{Nullmode}}$ (Gl.3.32) auftretenden Ausdruck $+\frac{g^2L}{8\pi^2}\frac{1}{(\hat{a}^{c_0})^2}\begin{pmatrix} \left\langle 0000\middle|\hat{L}^2\middle|0000\right\rangle & \left\langle 0000\middle|\hat{L}^2\middle|1100\right\rangle \\ \left\langle 1100\middle|\hat{L}^2\middle|0000\right\rangle & \left\langle 1100\middle|\hat{L}^2\middle|1100\right\rangle \end{pmatrix}$

---

[1]Es sind die Symmetrien der im Anhang B eingeführten Größen gemeint:

$$(x \leftrightarrow y) \ \Leftrightarrow \ (\delta^{-}_{x\neq y} \leftrightarrow -\delta^{-}_{x\neq y})$$

$$(A^i \leftrightarrow A^{i*})\Leftrightarrow\begin{pmatrix} (A123\,{}^{+-+}_{---}) & \leftrightarrow & -(A123\,{}^{+-+}_{---}) \\ (A12_{+-}) & \leftrightarrow & (A12_{-+}) \\ A^2A^{1*} - A^1A^{2*} & \leftrightarrow & -(A^2A^{1*} - A^1A^{2*}) \end{pmatrix} \quad .$$

weg, so daß für $H^{\text{Pal}} = H^{\text{Pal}}_{\text{Nullmode}} + H_m + H^{\text{Pal}}_{\text{Coul}}$ schließlich folgt,

$$\begin{pmatrix} \langle 0000 | H^{\text{Pal}} | 0000 \rangle & \langle 0000 | H^{\text{Pal}} | 1100 \rangle \\ \langle 1100 | H^{\text{Pal}} | 0000 \rangle & \langle 1100 | H^{\text{Pal}} | 1100 \rangle \end{pmatrix} = \left[-\frac{g^2 L}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{(\partial \hat{a}^{c_0})^2} - \frac{g^2 L}{8} + 2m \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{g^2 L}{16} \begin{pmatrix} -G^{\text{Ax}}_{11}(d) - \left(G^{\text{Ax}}_{12}(d) + G^{\text{Ax}}_{12}(-d) \right) + 2G^{\text{Ax}}_{12}(0) & -\left(G^{\text{Ax}}_{12}(d) - G^{\text{Ax}}_{12}(-d) \right) \\ +\left(G^{\text{Ax}}_{12}(d) - G^{\text{Ax}}_{12}(-d) \right) & -G^{\text{Ax}}_{11}(d) + \left(G^{\text{Ax}}_{12}(d) + G^{\text{Ax}}_{12}(-d) \right) + 2G^{\text{Ax}}_{12}(0) \end{pmatrix} . \tag{A.17}$$

Ein Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck in der Axialen Eichung (Gl.4.34) zeigt,

$$\begin{pmatrix} \langle 0000 | H^{\text{Pal}} | 0000 \rangle & \langle 0000 | H^{\text{Pal}} | 1100 \rangle \\ \langle 1100 | H^{\text{Pal}} | 0000 \rangle & \langle 1100 | H^{\text{Pal}} | 1100 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 00 | H^{\text{Ax}} | 00 \rangle & \langle 00 | H^{\text{Ax}} | 10 \rangle \\ \langle 10 | H^{\text{Ax}} | 00 \rangle & \langle 10 | H^{\text{Ax}} | 10 \rangle \end{pmatrix} \quad . \tag{A.18}$$

Dies war zu beweisen.

Anhang B

Ergänzungen zur Projektion auf physikalische Basiszustände in der Palumbo-Eichung

Es ist unser Ziel, die Wirkung von Operatoren der Struktur $\sum_{a,b} A^{a*} A^b \rho_m^a(x)\rho_m^b(y)$ mit $A^a \in \mathcal{C}$ auf die Basiszustände $\big|0000\big\rangle$, $\big|1100\big\rangle$ zu bestimmen. Diese Basiszustände bauen sich nach (4.46) im fermionischen Sektor aus $\underset{\text{Quark}}{\big|0\,0\big\rangle}$, $\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle}$, $\underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}$, $\underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle}$ auf. Die $\underset{\text{Quark}}{\big|l\,m\big\rangle}$ sind wiederum durch auf das Vakuum wirkende Quarkerzeuger $\phi_i^\dagger$ gegeben. So ist z.B. nach (4.46) $\underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle} = \big|\tfrac{1}{2}\,{-\tfrac{1}{2}}\big\rangle_{y_0}\big|\tfrac{1}{2}\,{-\tfrac{1}{2}}\big\rangle_{x_0} = \phi_2^\dagger(y_0)\phi_2^\dagger(x_0)\big|\underset{\text{Ferm}}{\mathbf{vac}}\big\rangle$.

Die fermionischen Ladungsdichten $\rho_m^b(y)$ sind nach (2.5) definiert über $\rho_m^b(y) = \psi_i^\dagger(y)\frac{\lambda_{ij}^b}{2}\psi_j(y)$, wobei $\psi_i = \begin{pmatrix}\phi_i\\ \chi_i^\dagger\end{pmatrix}$ und die λ^a in einer Darstellung mit diagonalem λ^3 durch die Pauli-Spin-Matrizen gegeben sind. Da die baryonischen Zustände keine Antiquarks enthalten, wirken die Anteile mit Antiquarkvernichtern χ_i in den ρ_m^b ohne Antikommutationsrest auf das Vakuum. Diese Anteile brauchen daher nicht weiter betrachtet zu werden. Die relevanten Anteile der ρ_m^b für unsere baryonischen Zustände sind somit gegeben durch,

$$\begin{array}{rcll} \rho_m^1(y) & \hat{=} & \frac{1}{2}\big(& \phi_1^\dagger(y)\phi_2(y) + \phi_2^\dagger(y)\phi_1(y) \quad \big) \\ \rho_m^2(y) & \hat{=} & \frac{i}{2}\big(& -\phi_1^\dagger(y)\phi_2(y) + \phi_2^\dagger(y)\phi_1(y) \quad \big) \\ \rho_m^3(y) & \hat{=} & \frac{1}{2}\big(& \phi_1^\dagger(y)\phi_1(y) - \phi_1^\dagger(y)\phi_2(y) \quad \big) \end{array} \tag{B.1}$$

Indem man nun die Vernichtungsoperatoren in den ρ_m^b so lange an den Erzeugungsoperatoren in den $\underset{\text{Quark}}{\big|l\,m\big\rangle}$ vorbeizieht, bis sie auf das Vakuum wirken und somit Null ergeben, bestimmen wir die Wirkung der 3 Operatoren ρ_m^b auf die 4 fermionischen Zustände $\underset{\text{Quark}}{\big|l\,m\big\rangle}$ ($\rightarrow 3 \cdot 4 = 12$ Terme). Anschließend werden diese Ausdrücke zusammengefaßt zu den 4

Termen $\sum_{b=1}^{b=3} A^b\rho_m^b(y)\underset{\text{Quark}}{\big|l\,m\big\rangle}$,

$$\begin{aligned}
A^b\rho_m^b(y)\underset{\text{Quark}}{\big|0\,0\big\rangle} &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\delta_{yy_0}-\delta yx_0\Big)\Big\{\ (A^1+iA^2)\ \underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}-(A^1-iA^2)\ \underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle}\Big\}+\tfrac{1}{2}\Big(\delta_{yy_0}-\delta yx_0\Big)A^3\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle}\,,\\
\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle} &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\delta_{yy_0}+\delta_{yx_0}\Big)\Big\{\ (A^1+iA^2)\ \underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}+(A^1-iA^2)\ \underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle}\Big\}+\tfrac{1}{2}\Big(\delta_{yy_0}-\delta_{yx_0}\Big)A^3\underset{\text{Quark}}{\big|0\,0\big\rangle}\quad,\\
\underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle} &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(A^1-iA^2\Big)\ \Big\{\ (\delta_{yy_0}-\delta_{yx_0})\ \underset{\text{Quark}}{\big|0\,0\big\rangle}\ +(\delta_{yy_0}+\delta_{yx_0})\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle}\Big\}-\tfrac{1}{2}\Big(\delta_{yy_0}+\delta_{yx_0}\Big)A^3\underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}\quad,\\
\underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle} &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(A^1+iA^2\Big)\ \Big\{-(\delta_{yy_0}-\delta_{yx_0})\underset{\text{Quark}}{\big|0\,0\big\rangle}\ +(\delta_{yy_0}+\delta_{yx_0})\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle}\Big\}+\tfrac{1}{2}\Big(\delta_{yy_0}+\delta_{yx_0}\Big)A^3\underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle}\quad,
\end{aligned}\tag{B.2}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Relationen (B.2) gewinnen wir die 4 Ausdrücke $A^{a*}\rho_m^a(x)A^b\rho_m^b(y)\underset{\text{Quark}}{\big|l\,m\big\rangle}$. Damit läßt sich die Wirkung von $A^{a*}A^b\rho_m^a(x)\rho_m^b(y)$ auf $\big|0000\big\rangle$ und $\big|1100\big\rangle$ bestimmen,

$$A^{a*}A^b\rho_m^a(x)\rho_m^b(y)\big|0000\big\rangle \;=\; \underset{\text{Gluon}}{\big|0\,0\big\rangle}\,A^{a*}A^b\rho_m^a\rho_m^b\,\underset{\text{Quark}}{\big|0\,0\big\rangle}\quad, \tag{B.3}$$

$$\big|1100\big\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigg(\underset{\text{Gluon}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}\,A^{a*}A^b\rho^a\rho^b\,\underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle}+\underset{\text{Gluon}}{\big|1\,1\big\rangle}\,A^{a*}A^b\rho^a\rho^b\,\underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}-\underset{\text{Gluon}}{\big|1\,0\big\rangle}\,A^{a*}A^b\rho^a\rho^b\,\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle}\Bigg). \tag{B.4}$$

Um die Ergebnisse 'übersichtlich' zu gestalten, führen wir folgende suggestive Abkürzungen ein,

$$\begin{aligned}
(A123_{+++}) &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A^1+iA^2)A^{3*}+A^3(A^{1*}+iA^{2*})\Big], &\quad (A12_{++}) &:= (A^1+iA^2)(A^{1*}+iA^{2*}),\\
(A123_{+-+}) &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A^1+iA^2)A^{3*}-A^3(A^{1*}+iA^{2*})\Big], & (A12_{+-}) &:= (A^1+iA^2)(A^{1*}-iA^{2*}),\\
(A123_{-+-}) &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A^1-iA^2)A^{3*}+A^3(A^{1*}-iA^{2*})\Big], & (A12_{-+}) &:= (A^1-iA^2)(A^{1*}+iA^{2*}),\\
(A123_{---}) &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A^1-iA^2)A^{3*}-A^3(A^{1*}-iA^{2*})\Big], & (A12_{--}) &:= (A^1-iA^2)(A^{1*}-iA^{2*}),
\end{aligned}\tag{B.5}$$

$$\delta^{\pm}_{x=y}:=\delta_{yy_0}\delta_{xy_0}\pm\delta_{yx_0}\delta_{xx_0}\qquad,\qquad \delta^{\pm}_{x\neq y}:=\delta_{yx_0}\delta_{xy_0}\pm\delta_{yy_0}\delta_{xx_0}\quad. \tag{B.6}$$

Für reelle A^a gilt insbesondere,

$$\begin{aligned}
(A123_{+-+}) = (A123_{---}) &= 0 \quad,\\
(A12_{+-}) \;=\; (A12_{-+}) &= (A^1)^2+(A^2)^2 \quad.
\end{aligned}\tag{B.7}$$

Mit Hilfe der Abkürzungen (B.5, B.6) schreibt sich die Wirkung der $A^{a*}A^b\rho_m^a(x)\rho_m^b(y)$ auf $\big|0000\big\rangle$, $\big|1100\big\rangle$,

$$\begin{aligned}
&A^{a*}A^b\rho_m^a(x)\rho_m^b(y)\big|0000\big\rangle = \\
&\qquad \tfrac{1}{4}\Big(\delta^{+}_{x=y}-\delta^{+}_{x\neq y}\Big)\quad \Big(|A^1|^2+|A^2|^2+|A^3|^2\Big)\big|0000\big\rangle\\
&\quad + \tfrac{1}{4}\Big(\delta^{-}_{x\neq y}-\delta^{-}_{x=y}\Big)\quad \underset{\text{Gluon}}{\big|0\,0\big\rangle}\Big[(A123_{+-+})\underset{\text{Quark}}{\big|1\,{-1}\big\rangle}+(A123_{---})\underset{\text{Quark}}{\big|1\,1\big\rangle}-i\Big(A^2A^{1*}-A^1A^{2*}\Big)\underset{\text{Quark}}{\big|1\,0\big\rangle}\Big],
\end{aligned}\tag{B.8}$$

$$
\begin{aligned}
&A^{a*}A^{b}\rho_m^a(x)\rho_m^b(y)\Big|1100\Big\rangle = \\
&\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigg\{ \underset{\text{Quark}}{\Big|0\,0\Big\rangle} \Big(\delta^-_{x=y}+\delta^-_{x\neq y}\Big)\Big[-i\Big(A^2A^{1*}-A^1A^{2*}\Big)\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}+(A123_{+-+})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}+(A123_{---})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}\Big] \\
&\quad +\underset{\text{Quark}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}\Big[\ \delta^+_{x=y}\Big(+(A123_{+-+})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}+(A12_{-+})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}+|A^3|^2\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}\Big) \\
&\qquad\qquad +\delta^+_{x\neq y}\Big(+(A123_{+++})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}+(A12_{++})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}+|A^3|^2\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}\Big)\Big] \\
&\quad +\underset{\text{Quark}}{\Big|1\,1\Big\rangle}\Big[\ \delta^+_{x=y}\Big(-(A123_{---})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}+(A12_{+-})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}+|A^3|^2\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}\Big) \\
&\qquad\qquad +\delta^+_{x\neq y}\Big(-(A123_{-+-})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}+(A12_{--})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}+|A^3|^2\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}\Big)\Big] \\
&\quad -\underset{\text{Quark}}{\Big|1\,0\Big\rangle}\Big[\ \delta^+_{x=y}\Big(\Big(|A^1|^2+|A^2|^2+|A^3|^2\Big)\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}+(A123_{+-+})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}-(A123_{---})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}\Big) \\
&\qquad\qquad +\delta^+_{x\neq y}\Big(\Big(|A^1|^2+|A^2|^2-|A^3|^2\Big)\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,0\Big\rangle}-(A123_{+++})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,{-1}\Big\rangle}+(A123_{-+-})\underset{\text{Gluon}}{\Big|1\,1\Big\rangle}\Big)\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Diese Formeln finden ihre Anwendung im Anhang A [1].

[1] Um für vorgegebene A^a die Wirkung von $A^{a*}A^b\rho_m^a(x)\rho_m^b(y)$ auf $\big|0000\big\rangle$, $\big|1100\big\rangle$ zu bestimmen, verwendet man die explizite Form der $\Big\langle\vartheta,\varphi\,\underset{\text{Gluon}}{\Big|l\,m\Big\rangle}$ aus (4.47).

Literaturverzeichnis

[Abr65] M.Abramowitz, I.A.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York 1965.

[Alo73] M.Alonso, H.Valk, *Quantum Mechanics: Principles and applications*, Addison-Wesley, London 1973.

[Bro89] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, 24.Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main 1989.

[Edm64] A.R.Edmonds, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim 1964.

[Eng94] M.Engelhardt *Farbeinschluß und Thermodynamik in der* QCD_{1+1}, Doktorarbeit, Erlangen 1994.

[Eng95] M.Engelhardt and B.Schreiber, Z. Phys. **A 351** (1995) 71.

[Gra57] I.M.Ryshik, I.S.Gradstein, *Tables of series, products and integrals*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

[Gri87] D.Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, New York 1987.

[Hel94] C.Helm, *Spontane Brechung der Displacement-Symmetrie bei endlicher Temperatur*, Diplomarbeit, Erlangen 1994.

[Hof61] W.Gröbner, N.Hofreiter, *Integraltafel, Zweiter Teil: Bestimmte Integrale*, Springer-Verlag, Wien 1961.

[Hua92] K.Huang, *Quarks, Leptons and Gauge fields*, 2.ed., World Scientific, Singapore 1992.

[Jol61] L.B.Jolley, *Summation of series*, 2.rev. ed., Dover, New York 1961.

[Kam83] E.Kamke, *Differentialgleichungen*, Band 1, 10.Auflage, Teubner, Stuttgart 1983.

[Len91] F.Lenz, M.Thies, K.Yazaki, S.Levit, *Hamiltonian formulation of two-dimensional gauge theories on the light-cone*, Ann.Phys. **208** (1991) 1.

[Len94.1] F.Lenz, H.W.L.Naus, K. Ohta, M.Thies, *Quantum Mechanics of Gauge Fixing*, Ann. Phys. **233** (1994) 51.

[Len94.2] F.Lenz, H.W.L.Naus, M.Thies, *QCD in the Axial Gauge Representation*, Ann. Phys. **233** (1994) 317.

[Lev91] S.Levit, *Topics in QCD*, Lectures held at the workshop on topics in QCD, 16.10.91-18.10.91, Waischenfeld, Germany.

[Mes91] A.Messiah, *Quantenmechanik*, Band 1, 2.Auflage, de Gruyter, New York 1991.

[Mut87] T.Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore 1987.

[Pal86] F.Palumbo, *Quantization of Gauge Theories on a torus*, Phy. Lett. **B 173** (1986) 81.

[Pal90] F.Palumbo, *Exact evaluation of the Faddeev-Popov determinant in a complete axial gauge on a torus*, Phys. Lett. **B 243** (1990) 109.

[Ryd87] L.H.Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press 1985.

[Sch93] B.Schreiber, *Gluonfreiheitsgrade und Hintergrundfelder der Quantenchromodynamik in einer Raumdimension*, Doktorarbeit, Erlangen 1993.

[See94] M.Seeger, *Wigner-Weyl-Phasen der Displacement-Symmetrie in der Quantenelektrodynamik*, Diplomarbeit, Erlangen 1994.

[See95] S.Seeger, *Bemerkungen zur Quantenchromodynamik auf dem Torus in Axialer und Palumbo-Eichung*, Interner Bericht, Erlangen 1995.

[Sto94] D.Stoll, S.Takeuchi, K.Yazaki, *The role of zero modes for the infrared behavior of QCD*, Phy. Lett. **B 338** (1994) 313.

[Thi93] M.Thies, *Notes on the Palumbo Gauge* (unpublished).

[Tun85] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, Singapore 1985.

[Whe68] A.D.Wheelon, *Tables of Summable Series and Integrals Involving Bessel Functions*, Holden-Day, San Francisco 1968.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Michael Thies für die vielen hilfreichen und klärenden Diskussionen, die die Entstehung dieser Arbeit begleitet haben und für die zahlreichen Anregungen, die er mir im Laufe der Zeit gegeben hat.

Besonderer Dank gilt Thomas Kraus für die wertvolle Unterstützung in der Anfangsphase meiner Arbeit, für seine stetige Diskussionsbereitschaft und für das sorgfältige Korrekturlesen einer frühen Version.

Weiterhin danke ich Marc Kachelrieß, Jochen Zeltner, Harald Numrich, Angela Foesel und Josef Rottbauer für die heitere Atmosphäre auf den Zimmern 02.505 und 02.506 .

Nicht zuletzt möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die durch Zuhören oder Hinweise in irgendeiner Form zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Sie alle aufzuzählen ist nicht möglich und soll daher auch nicht versucht werden.

Hiermit erkläre ich, daß ich vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Erlangen, Juli 1995 Stephan Seeger